

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Condições de Engel em subgrupos verbais de grupos residualmente finitos

por

**Raimundo de Araújo Bastos Júnior**

**Orientador: Prof. Dr. Pavel Shumyatsky**

Brasília  
2014

À Deus.

À minha mãe,  
Francisca (Petinha)

Às minhas sobrinhas,  
Denise Bastos & Diana Bastos

Aos meus avós (in memorian),  
Horácio & Maria,  
Chico & Mimi  
e vô Preto.

“An expert is a person who  
has made all the mistakes  
which can be made,  
in a narrow field.”  
(Niels Bohr).

“The most exciting phrase to hear  
in science, the one that heralds  
new discoveries, is not “Eureka!”  
but ‘That’s funny...’ ”  
(Isaac Asimov)

“A mente quer ser,  
mas querendo erra;  
pois só sem desejos  
que se vive o agora.”  
(Ipê - Belchior)

---

## Agradecimentos

---

- Aos professores, pela formação matemática e pessoal. Em especial Pavel Shumyatsky, Pavel Zaleskii, Rudolf Maier, Alexei Krasilnikov, Lili-ane Maia, José Robério, Afonso Oliveira, Carlos Alberto, Ilir Snopche, Marco Pellegrini e Thomas Weigel.
- Ao professor Pavel Shumyatsky, pela confiança e orientação.
- Aos amigos do Departamento, pelos momentos de descontração. Especialmente Reinaldo de Marchi, Ismael Lins, Mano Igor, Robson Nascimento, Marcelo Furtado (Marcelão), Rui Seimetz, Ricardo Ruviano, Tarcísio Castro, Eudes Costa, Marcelo Bezerra (Marcelinho), Nilton Barroso, Tommaso Terragni, Helder Matos, Simone Camosso, Raluca Mee, Alex Dantas (Teló), Emerson de Melo, Federico Pasini, Martino Borello, Gianluca Ponzoni, Claudio Quadrelli, Ilaria Castellano e Elisa Baccanelli.
- Aos professores Pavel Shumyatsky, Aline Pinto, Cristina Acciarri, Aline Lima, José Robério e Alexei Krasilnikov. Pelas sugestões e correções para melhorar o texto.
- Ao professor Thomas Weigel, pela orientação no estágio de pesquisa na *Università degli Studi di Milano-Bicocca*.
- Aos amigos Antonio Tortora e Maria Tota, pela colaboração durante meus estudos de doutorado.

- Aos funcionários do Departamento, pela solicitude. Especialmente Marta Adriana, Cida, D. Irene, Luiz Santana (Lula), Bruna e Fátima.
- Ao querido amigo Manoel Vieira (in memorian), pela alegria.
- Aos meus irmãos Ricardo Bastos e Rochele Bastos, pelo carinho e paciência.
- À minha avó, pelo carinho e confiança.
- À minha mãe, pelo amor e grande paciência.
- À Capes e ao CNPq, pelo apoio financeiro.

---

## Resumo

---

A questão central abordada nesse trabalho é a seguinte:

**Conjectura.** Sejam  $w$  uma palavra de grupo e  $n$  um inteiro positivo. Se  $G$  é um grupo residualmente finito no qual todos os  $w$ -valores são  $n$ -Engel, então o subgrupo verbal associado,  $w(G)$ , é localmente nilpotente.

Quando  $w = x$ , essa conjectura coincide com o célebre resultado de J. Wilson para grupos  $n$ -Engel residualmente finitos. Obtemos solução positiva para tal questão em outras classes de palavras. Nossas principais contribuições foram determinar critérios de nilpotência locais para subgrupos verbais de grupos residualmente finitos e grupos profinitos finitamente gerados. Cabe ressaltar que em diversas demonstrações foram empregados métodos Lie-teóricos criados por E. I. Zelmanov.

**Palavras-chave:** Elementos Engel; grupos residualmente finitos; grupos profinitos.

---

## Abstract

---

The main theme in this work is the following:

**Conjecture.** *Let  $w$  be a group-word and  $n$  a positive integer. Assume that  $G$  is a residually finite group in which all  $w$ -values are  $n$ -Engel. Then the corresponding verbal subgroup  $w(G)$  is locally nilpotent.*

When  $w = x$ , this conjecture coincides with the result due to J. Wilson for  $n$ -Engel residually finite groups. Here, we obtained the positive solution for many classes of words. Our main contributions are to give nilpotency criteria for verbal subgroups of residually finite and finitely generated profinite groups. In the proofs we used Lie-methods created by E. I. Zelmanov.

**Keywords:** Engel elements; residually finite groups; profinite groups.

---

## Índice de Notações

---

$x^y$	$y^{-1}xy$ ;
$x^G$	classe de conjugação de $x$ em $G$ ;
$X^G$	fecho normal do conjunto $X$ em $G$ ;
$[x, y]$	$x^{-1}y^{-1}xy$ ;
$ S $	cardinalidade do conjunto $S$ ;
$H \leq G$	$H$ é subgrupo de $G$ ;
$H \trianglelefteq G$ ou $H \triangleleft G$	$H$ é subgrupo normal de $G$ ;
$G \simeq K$	$G$ é isomorfo a $K$ ;
$ G : H $	índice do subgrupo $H$ no grupo $G$ ;
$\langle X \rangle$	subgrupo gerado por $X$ ;
$[A, B]$	subgrupo $\langle [a, b] \mid a \in A \text{ e } b \in B \rangle$ ;
$G'$	$[G, G]$ ;
$G/N$	grupo quociente de $G$ por (um subgrupo normal) $N$ ;
$G_1 \times \dots \times G_k$	produto direto dos grupos $G_1, \dots, G_k$ ;
$H \rtimes N$	produto semidireto de $N$ por $H$ ;
$\Gamma_k(G)$	conjunto dos comutadores de peso $k$ em $G$ ;
$\gamma_k(G)$	$k$ -ésimo termo da série central inferior de $G$ ;
$G^{(k)}$	$k$ -ésimo termo da série derivada de $G$ ;
$G^k$	subgrupo gerado pelas $k$ -ésimas potências de $G$ ;
$G_p$	$p$ -subgrupo de Sylow de $G$ ;
$\hat{G}_p = \hat{G}$	completamento pro- $p$ de $G$ ;



$HP(G)$	radical de Hirsch-Plotkin de $G$ ;
$\varepsilon(G)$ ( $\bar{\varepsilon}(G)$ )	conjunto dos elementos Engel (limitados) de $G$ ;
$w(G)$	subgrupo verbal associado a $w$ em $G$ ;
$D_n$	diedral de ordem $2n$ ;
$D_\infty$	diedral infinito;
$\mathcal{N}^h$	grupos solúveis com altura de Fitting $\leq h$ ;
$Fit(G)$	subgrupo de Fitting de $G$ ;

---

## Sumário

---

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>8</b>
1.1 Subgrupos Verbais . . . . .	8
1.2 Propriedades de grupos . . . . .	12
1.3 Grupos Profinitos . . . . .	16
1.4 Resultados Lie-Teóricos . . . . .	20
<b>2 Condições de Engel</b>	<b>25</b>
2.1 Condições de Engel . . . . .	25
2.2 Radical de Hirsch-Plotkin . . . . .	28
2.3 Elementos Engelianos . . . . .	32
<b>3 Grupos residualmente finitos</b>	<b>37</b>
3.1 Motivação e resultados principais . . . . .	37
3.2 Demonstrações dos resultados . . . . .	39
3.2.1 Comutador Multilinear . . . . .	39
3.2.2 Palavra não-comutador . . . . .	43
<b>4 Grupos profinitos finitamente gerados</b>	<b>50</b>
4.1 Motivação e resultados principais . . . . .	50
4.2 Demonstrações dos resultados . . . . .	51

<b>5</b>	<b>Grupos satisfazendo identidades</b>	<b>59</b>
5.1	Motivação e resultados principais . . . . .	59
5.2	Demonstrações dos resultados . . . . .	60
<b>A</b>	<b>Problemas de Burnside</b>	<b>65</b>
A.1	Problemas de Burnside . . . . .	65
A.2	Problema Restrito de Burnside . . . . .	66
A.3	Grupos localmente graduados . . . . .	66
<b>B</b>	<b>Conjecturas</b>	<b>68</b>
B.1	Subgrupos Verbais . . . . .	68
B.2	Engelianidade . . . . .	71
B.3	Nil-automorfismos . . . . .	71
	<b>Referências</b>	<b>73</b>

---

## Introdução

---

Nosso objetivo é obter critérios de nilpotência para subgrupos verbais de grupos residualmente finitos e profinitos finitamente gerados. Mas a motivação para o nosso estudo é baseada em certos problemas gerais sobre subgrupos verbais.

Antes de citar os problemas que motivam o nosso trabalho, fixamos algumas notações mínimas. Um elemento não trivial do grupo livre  $F = F(X)$ , onde  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  é um conjunto de geradores livres de  $F$ , é chamado de palavra de grupo (ou simplesmente, palavra). Sejam  $w = w(x_1, \dots, x_s)$  uma palavra e  $G$  um grupo. Dados  $g_1, \dots, g_s \in G$ , o elemento  $w(g_1, \dots, g_s)$  é chamado de  $w$ -valor (em  $G$ ); o conjunto de todos os  $w$ -valores é denotado por  $G_w$ , isto é,  $G_w = \{w(g_1, \dots, g_s) \mid g_i \in G\}$ . E o subgrupo verbal  $w(G)$  é definido como sendo o subgrupo gerado pelo conjunto  $G_w$ .

**Problema 1.** (Hall) Sejam  $G$  um grupo e  $w = w(x_1, \dots, x_s)$  uma palavra. Se  $G_w$  é um conjunto finito, então o subgrupo  $w(G)$  é finito?

Tal problema admite resposta positiva [R, Capítulo 4, págs. 119–121] para as palavras da forma

$$\gamma_k = [x_1, \dots, x_k] \text{ e } \delta_k = [\delta_{k-1}(x_1, \dots, x_{2^{k-1}}), \delta_{k-1}(x_{2^{k-1}+1}, \dots, x_{2^k})]$$

Quando uma palavra satisfaz o Problema de Ph. Hall, chamamos tal palavra de *concisa*. Em [I], S. V. Ivanov mostrou que tal problema em geral é falso. Ou seja, existem palavras que não são concisas.

Recentemente, D. Segal [SD1] sugeriu uma questão análoga a essa questão de Ph. Hall, mas restrita a classe dos grupos residualmente finitos. Em [AS], C. Acciarri e P. Shumyatsky obtiveram o seguinte avanço para tal questão:

**Teorema.** (Acciarri e Shumyatsky, [AS, Teorema 1.1]) Seja  $q$  a potência de um primo  $p$  e  $w$  um comutador multilinear. Considere  $v = w^q$ . Então  $v$  é concisa na classe dos grupos residualmente finitos.

Outra questão interessante nessa perspectiva foi proposta por I. D. Macdonald (e reapareceu, sugerida por V. D. Mazurov em “The Kourovka Notebook” [Kh.M, Problema 13.34]) é a seguinte:

**Problema 2.** (Macdonald) Seja  $n$  um inteiro positivo e  $G$  um grupo. Se  $[x, y]^n = 1$ , para todos  $x, y \in G$ , então cada elemento do subgrupo derivado tem ordem finita?

A resposta para tal questão é também, em geral, negativa. Foram dados contra-exemplos por: G. S. Deryabina e P. A. Kozhevnikov [DK] e S. I. Adyan [ASI]. Dado a palavra  $w_1(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$ , denotamos por  $G'$  o subgrupo gerado por  $G_{w_1}$ . Usando a solução do Problema Restrito de Burnside, P. Shumyatsky [S] mostrou que o **Problema 2** tem resposta positiva se o problema for restrito a classe dos grupos residualmente finitos e  $n$  é uma potência de um primo. Mais precisamente:

**Teorema.** (Shumyatsky, [S]) Sejam  $G$  um grupo residualmente finito e  $q$  uma potência de um primo  $p$ . Se  $[x, y]^q = 1$ , para todos  $x, y \in G$ , então  $G'$  é localmente finito.

Esses dois problemas são parte importante da motivação desse trabalho. A perspectiva do trabalho é determinar que restrições devemos impor sobre o conjunto  $G_w$  para que o subgrupo  $w(G)$  seja localmente nilpotente. Mais precisamente:

**Problema 3.** Sejam  $\mathcal{X}$  uma classe de grupos,  $G \in \mathcal{X}$  e  $w$  uma palavra. Quais restrições devemos impor sobre o conjunto  $G_w$ , para que o subgrupo  $w(G)$  seja localmente nilpotente?

A restrição que impomos sobre o conjunto  $G_w$  são as condições de Engel.

Sejam  $G$  um grupo e  $g \in G$ . Dizemos que  $g$  é *Engel* se para cada  $h \in G$  existir um inteiro positivo  $n = n(h)$  tal que

$$[h, {}_n g] = 1.$$

Caso a escolha do  $n$  seja independente da escolha do elemento  $h \in G$ , dizemos que  $g$  é  *$n$ -Engel*. Dizemos que um grupo  $G$  é *Engel* se todos os seus elementos são Engel; um grupo é  *$n$ -Engel* (ou ainda,  $G$  satisfaz a  $n$ -ésima condição de Engel) se todos os seus elementos são  $n$ -Engel. Dizemos ainda que  $G$  é Engel limitado se cada elemento  $x \in G$  é  $n$ -Engel, onde  $n$  depende da escolha do elemento  $x$ . Chamamos  $HP(G)$  o único subgrupo normal localmente nilpotente contendo todos os subgrupos normais localmente nilpotentes de  $G$ . Chamamos  $HP(G)$  o radical de Hirsch-Plotkin de  $G$ .

Daí, o nosso objeto de estudos são os elementos Engel de um grupo  $G$ . Sabemos que,

$$HP(G) \subseteq \varepsilon(G),$$

sendo que  $\varepsilon(G)$  é o conjunto dos elementos Engel de  $G$ . Em geral, tais conjuntos não coincidem e, na verdade, o conjunto  $\varepsilon(G)$  não precisa ao menos ser subgrupo de  $G$ . Nosso objetivo é estudar elementos Engel em subgrupos verbais de grupos residualmente finitos. Para justificar a escolha de tal classe de grupos, cabe destacar alguns fatos:

Em 1991, usando a solução positiva do Problema Restrito de Burnside, J. Wilson mostrou que:

**Teorema.** (Wilson, [W, Teorema 2]) Seja  $n$  um inteiro positivo. Se  $G$  é um grupo  $n$ -Engel residualmente finito, então  $G$  é localmente nilpotente.

Em particular,  $HP(G) = \varepsilon(G) = G$ . Em 1999, P. Shumyatsky estendeu tal teorema da seguinte forma:

**Teorema.** (Shumyatsky, [S1]) Sejam  $k, n$  inteiros positivos e  $G$  um grupo residualmente finito. Se  $[x_1, \dots, x_k]$  é  $n$ -Engel, para quaisquer  $x_1, \dots, x_k \in G$ , então o  $k$ -ésimo termo da série central inferior é localmente nilpotente.

Isso nos sugere a seguinte Conjectura:

**Conjectura A.** Sejam  $w$  palavra de grupo e  $n$  um inteiro positivo. Assuma que  $G$  é um grupo residualmente finito no qual todos os  $w$ -valores são  $n$ -Engel. Então, o subgrupo verbal correspondente  $w(G)$  é localmente nilpotente.

Em relação a **Conjectura A**, obtemos os seguintes avanços:

**Teorema A.** (B., Shumyatsky, Tortora e Tota, [BSTT, Teorema A]) Sejam  $d, n$  inteiros positivos e  $w$  um comutador multilinear. Considere  $v = w^d$ . Se  $G$  é um grupo residualmente finito no qual todos os  $v$ -valores são  $n$ -Engel, então o subgrupo verbal correspondente,  $v(G)$ , é localmente nilpotente.

**Teorema B.** (B., Shumyatsky, Tortora e Tota, [BSTT, Teorema B]) Sejam  $n$  um inteiro positivo e  $w$  um comutador multilinear. Se  $G$  é um grupo localmente graduado no qual todos os  $w$ -valores são  $n$ -Engel, então o subgrupo verbal  $w(G)$  é localmente nilpotente.

**Teorema C.** Sejam  $d, n$  inteiros positivos. Se  $G$  é um grupo residualmente finito no qual  $x$  é  $n$ -Engel ou  $x^d$  é  $n$ -Engel, para todo  $x \in G$ , então o subgrupo verbal  $G^d$  é localmente nilpotente.

**Teorema D.** (B., Shumyatsky, Tortora e Tota, [BSTT, Teorema C]) Sejam  $n$  um inteiro positivo e  $w$  uma palavra não-comutador. Se  $G$  é um grupo residualmente finito no qual todos os  $w$ -valores são  $n$ -Engel, então o subgrupo verbal correspondente,  $w(G)$ , é localmente nilpotente.

Na classe dos grupos profinitos finitamente gerados foram obtidos resultados interessantes acerca de condição de Engel. Por exemplo:

**Teorema.** (Wilson e Zelmanov, [WZ]) Seja  $G$  um grupo profinito finitamente gerado. Se  $G$  é Engel, então  $G$  é nilpotente.

**Teorema.** (Shumyatsky, [S5]) Sejam  $k$  um inteiro positivo e  $G$  um grupo profinito finitamente gerado. Se  $[x_1, \dots, x_k]$  é Engel, para todos  $x_1, \dots, x_k \in G$ , então  $\gamma_k(G)$  é localmente nilpotente.

Note que para grupos profinitos foi exigido que os elementos sejam apenas Engel. Por exemplo, existem grupos Engel residualmente finitos que não são

localmente nilpotentes (grupos de Golod-Shafarevich, [G]). Assim, nos resultados gerais para grupos residualmente finitos é necessário que os elementos sejam, pelo menos,  $n$ -Engel. Com isso, parece razoável considerar a seguinte pergunta:

**Problema 4.** Seja  $w$  uma palavra. Se  $G$  é um grupo profinito finitamente gerado no qual todos os  $w$ -valores são Engel, então o subgrupo verbal correspondente,  $w(G)$ , é localmente nilpotente?

**Observação 0.0.1.** *Seja  $G$  um grupo profinito e  $w$  uma palavra. Em princípio, o grupo abstrato  $\langle G_w \rangle$  não precisa ser um subgrupo fechado de  $G$ .*

A título de ilustração, cabe destacar um resultado geral de A. Jaikin-Zapirain acerca dos subgrupos verbais de grupos pro- $p$  finitamente gerados:

**Teorema** (Jaikin-Zapirain, [J-Z, Teorema 1.1]) *Seja  $w = w(x_1, \dots, x_s)$  uma palavra. Chamemos  $F = F(x_1, \dots, x_s)$ . Então são equivalentes*

- (a)  $w(P) \subseteq_c P$  (gerado como grupo abstrato), para qualquer grupo pro- $p$  finitamente gerado  $P$ ;
- (b)  $w \notin (F')^p F''$ .

Mesmo com tais restrições, obtemos os seguintes resultados:

**Teorema E.** *Sejam  $k, d$  inteiros positivos e  $G$  um grupo pronilpotente finitamente gerado. Se  $[x_1, \dots, x_k]^d$  é Engel, para todos  $x_1, \dots, x_k \in G$ , então  $\gamma_k(G)$  é localmente (nilpotente-por-finito).*

Observamos que o **Teorema A** não parece admitir uma versão análogo no caso profinito. O resultado mais próximo que obtivemos nessa direção foi o teorema acima, o qual ainda está restrito aos grupos pronilpotentes finitamente gerados.

**Teorema F.** *Sejam  $w$  palavra não-comutador e  $G$  um grupo profinito finitamente gerado. Se todos os  $w$ -valores são Engel, então o subgrupo verbal correspondente  $w(G)$  é nilpotente.*



Direta ou indiretamente, nos resultados anteriores consideramos que nossos grupos satisfaziam identidades (ou identidades de classe). E, em geral, tal fato tem relação com a imposição da condição de Engel em certos elementos. Os últimos resultados do trabalho destoam um pouco do escopo dos primeiros resultados, pois não são critérios de nilpotência ou solubilidade (local) para subgrupos verbais. Consideramos grupos residualmente finitos (ou localmente graduados) satisfazendo uma identidade  $f \equiv 1$  e demonstramos os seguintes teoremas:

**Teorema G.** (B., A. Tortora e M. Tota) Seja  $G$  um grupo residualmente finito satisfazendo alguma identidade  $f \equiv 1$ . Se  $G$  é Engel limitado, então  $G$  é localmente nilpotente.

**Teorema H.** (B., A. Tortora e M. Tota) Seja  $G$  um grupo localmente graduado satisfazendo alguma identidade  $f \equiv 1$ . Se  $G$  é Engel limitado, então  $G$  é localmente nilpotente.

A estrutura desse trabalho, em vias gerais, é a seguinte:

Capítulo 1. Apresentamos as noções básicas para a leitura do texto. Incluindo, especialmente, as noções de subgrupos verbais, grupos profinitos e resultados Lie-Teóricos.

Capítulo 2. Apresentamos os resultados clássicos associados as Condições de Engel, especialmente aqueles que são usados ao longo do trabalho. Os Capítulos 1 e 2 são a base conceitual da Tese.

Capítulo 3. Estudamos critérios de nilpotência local para subgrupos verbais de grupos residualmente finitos, supondo que certos elementos são  $n$ -Engel. E, adicionalmente, como aplicação obtemos resultados semelhantes para grupos localmente graduados. Os **Teoremas A, B, C e D** são os resultados mais importantes do capítulo.

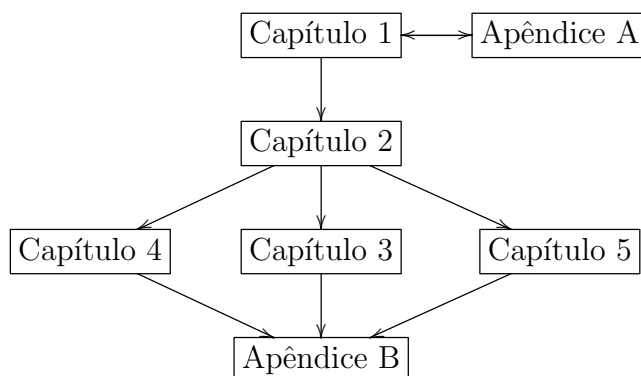
Capítulo 4. Esse capítulo é uma continuação natural do Capítulo 3. Mas estudamos critérios de nilpotência e solubilidade para subgrupos verbais de grupos profinitos finitamente gerados. Porém, nesse caso, estamos supondo que certos elementos são apenas Engel. Os **Teoremas E e F** são os resultados mais importantes do capítulo.

Capítulo 5. Estudamos condições para que os elementos Engel limitados de um dado grupo residualmente finito ou localmente graduado estejam no radical de Hirsch-Plotkin. Os **Teoremas G** e **H** são os resultados mais importantes do capítulo.

Apêndice A. Enunciamos os célebres Problemas de Burnside. Como consequência do Problema Restrito de Burnside, demonstramos que todo grupo localmente graduado de expoente finito é localmente finito [M, Teorema 1].

Apêndice B. Nessa Apêndice fazemos um apanhado (comentado) das Conjecturas que aparecem no meio do texto. Incluímos ainda, problemas genéricos associados aos Problemas gerais de Engelianidade e/ou Problemas sobre Subgrupos Verbais, não necessariamente conectados entre si.

Em princípio, os Capítulos 3, 4 e 5 são independentes. Com isso, o texto pode ser lido linearmente ou seguindo as relações de dependências entre os capítulos:



# CAPÍTULO 1

---

## Preliminares

---

Aqui fazemos um apanhado geral das terminologias e fatos relacionados que são usados ao longo do texto. Sendo que os resultados que não apresentamos demonstração são seguidos de uma referência, onde a prova pode ser encontrada.

### 1.1 Subgrupos Verbais

Para uma melhor ambientação introduzimos as terminologias necessárias para o entendimento das conjecturas e dos resultados a respeito de palavras e subgrupos verbais.

Uma *palavras de grupo*, ou simplesmente *palavra*, é um elemento não trivial do grupo livre  $F = F(X)$ , onde  $X$  é um conjunto de geradores livres  $\{x_1, x_2, \dots\}$ . Considere  $w = w(x_1, \dots, x_s)$  uma palavra, podemos escrever

$$w = x_{i_1}^{n_1} \dots x_{i_k}^{n_k},$$

onde  $n_j$  é um número inteiro e  $i_j \in \{1, \dots, s\}$ ,  $j = 1, \dots, k$ . A partir de agora, todas as palavras vão ser tomadas em sua forma reduzida.

**Definição 1.1.1.** *Sejam  $G$  um grupo e  $w = w(x_1, \dots, x_s)$  uma palavra. Dizemos que  $G$  satisfaz a identidade  $w \equiv 1$  se*

$$w(g_1, \dots, g_s) = 1$$

para todos  $g_1, \dots, g_s \in G$ . Algumas vezes, podemos dizer que  $G$  satisfaz a lei  $w \equiv 1$ .

Sejam  $G$  um grupo e  $w = w(x_1, \dots, x_s)$  uma palavra. Podemos associar a seguinte aplicação de  $G \times \dots \times G$  ( $s$  vezes) em  $G$ :

$$\begin{aligned} \Phi_w : \overbrace{G \times \dots \times G}^{s \text{ vezes}} &\longrightarrow G \\ (g_1, \dots, g_s) &\longmapsto w(g_1, \dots, g_s). \end{aligned}$$

Ou seja, dados os elementos  $g_1, \dots, g_s \in G$  e uma palavra  $w = w(x_1, \dots, x_s)$ , a imagem de  $(g_1, \dots, g_s)$  via  $\Phi_w$  é dada por

$$w(g_1, \dots, g_s) \in G.$$

**Definição 1.1.2.** *Sejam  $G$  um grupo e  $w = w(x_1, \dots, x_s)$  uma palavra.*

- *Dizemos que um elemento  $h \in G$  é um  $w$ -valor (em  $G$ ) se existem elementos  $g_1, \dots, g_s \in G$  de tal sorte que  $h$  possa ser escrito como:*

$$h = w(g_1, \dots, g_s).$$

*Denotamos por  $G_w$  o conjunto dos  $w$ -valores em  $G$ , ou seja,  $G_w = \text{Im } \Phi_w$ ;*

- *O subgrupo verbal associado à palavra  $w$  em  $G$  é definido como sendo o subgrupo gerado por todos os  $w$ -valores em  $G$ . Denotamos tal subgrupo por  $w(G)$ , ou seja:*

$$w(G) = \langle w(g_1, \dots, g_s) \mid g_1, \dots, g_s \in G \rangle = \langle G_w \rangle.$$

Por uma questão de uniformidade, adotamos as seguintes convenções sobre comutadores:

**Definição 1.1.3.** *Seja  $G$  um grupo. Dados  $g_1, g_2 \in G$ . Denotamos o comutador de  $g_1$  e  $g_2$  (nessa ordem) como sendo:*

$$[g_1, g_2] = g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2.$$

*Para  $k \geq 3$  e elementos  $g_1, \dots, g_k \in G$ . Denotamos o comutador dos elementos  $g_1, \dots, g_k$  (nessa ordem) de forma indutiva:*

$$[g_1, g_2, \dots, g_k] = [[g_1, g_2, \dots, g_{k-1}], g_k].$$

Nos referimos ao comutador  $[g_1, g_2]$  como sendo o comutador simples de peso 2. E, para  $k \geq 3$ , chamamos o comutador  $[g_1, g_2, \dots, g_k]$  como sendo o comutador de peso  $k$ .

**Proposição 1.1.4.** *Sejam  $G$  um grupo e  $w$  uma palavra de grupo. Então, o subgrupo verbal  $w(G)$  é um subgrupo característico de  $G$ .*

Para uma demonstração desse fato, veja em [R2, página 56].

**Definição 1.1.5.** *Dizemos que uma palavra de grupo  $w = w(x_1, \dots, x_s)$  é uma palavra do tipo comutador se a soma dos expoentes de cada variável envolvida em  $w$  é zero. Quando uma palavra não for do tipo comutador, dizemos que ela é não-comutador.*

**Exemplo 1.1.6.** *Sejam  $G$  um grupo e  $k$  um inteiro positivo.*

- $v_1 = v_1(x_1) = x_1^k$  é a palavra “potência” ( $k$ -ésima potência).
- $w_1 = w_1(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2]x_3^4$  é um exemplo de uma palavra não-comutador que não é uma potência.

Nas palavras do tipo comutador há uma família muito importante que são os comutadores multilineares, explicitamente:

**Definição 1.1.7.** *Sejam  $x_1, x_2, \dots$  um conjunto de geradores livres. Entendemos por comutador multilinear de peso 1, simplesmente as palavras da forma  $w = x_i$ , para algum  $i$ . Dizemos que uma palavra  $w$  é um comutador multilinear (de peso  $k > 1$ ), se ela tem a forma  $w = [w_1, w_2]$ , onde  $w_1$  e  $w_2$  são comutadores multilineares em variáveis distintas, de pesos  $s$  e  $t$ , respectivamente, com  $s + t = k$ .*

Seguem exemplos de palavras do tipo comutador.

**Exemplo 1.1.8.**

- O comutador multilinear de peso 2 é uma palavra  $w = [x_i, x_j]$ , nos geradores  $x_i$  e  $x_j$ , com  $i \neq j$ ;
- Seja  $k \in \mathbb{N}$ . Definimos a palavra  $\gamma_k$  da seguinte forma:

$$\gamma_1(x_1) = x_1 \text{ e } \gamma_k(x_1, \dots, x_k) = [[x_1, \dots, x_{k-1}], x_k].$$

- Seja  $k \in \mathbb{N}$ . Definimos a palavra  $\delta_k$  da seguinte forma:

$$\delta_0(x) = x \text{ e } \delta_k(x_1, \dots, x_{2^k}) = [\delta_{k-1}, \delta_{k-1}].$$

- Seja  $k \in \mathbb{N}$ . Consideramos  $\varepsilon_k = \varepsilon_k(x, y)$  a  $k$ -ésima palavra de Engel dada da seguinte forma:

$$\varepsilon_k = [x, \underbrace{y, \dots, y}_{k \text{ vezes}}] =: [x, {}_k y]$$

onde os comutadores são tomados indutivamente:

$$[x, {}_0 y] = x \text{ e } [x, {}_k y] = [[x, {}_{k-1} y], y].$$

**Observação 1.1.9.** Seja  $k \in \mathbb{N}$ . Temos que  $\gamma_k$  e  $\delta_k$  são comutadores multilineares. Enquanto isso, para  $k \geq 2$ ,  $\varepsilon_k$  não é um comutador multilinear.

Associado ao Exemplo 1.1.8, temos as seguintes classes de grupos (que são parte do nosso objeto de estudo).

**Definição 1.1.10.** Sejam  $G$  um grupo e  $k$  um inteiro positivo.

- Dizemos que  $G$  é nilpotente (de classe  $\leq k$ ) se  $\gamma_k(G) = 1$ , ou seja:

$$[g_1, \dots, g_{k+1}] = 1,$$

para todos  $g_1, \dots, g_{k+1} \in G$ ;

- Dizemos que  $G$  é solúvel (de comprimento derivado  $\leq k$ ) se  $\delta_k(G) = 1$ , ou seja:

$$[\delta_{k-1}(g_1, \dots, g_{2^{k-1}}), \delta_{k-1}(g_{2^{k-1}+1}, \dots, g_{2^k})] = 1,$$

para todos  $g_1, \dots, g_{2^k} \in G$ .

**Notação 1.1.11.**

- Seja  $k \geq 2$ . Usamos  $G^{(k)}$  para denotar o  $k$ -ésimo termo da série derivada do grupo  $G$ . Seguindo a Notação 1.1.3, devíamos escrever  $\delta_k(G)$ , mas em geral tal forma é menos usada.

- *Seja  $k$  um inteiro positivo. Denotamos o subgrupo verbal associado a palavra  $k$ -ésima potência em  $G$  como sendo  $G^k$ . Ou seja,*

$$G^k = \langle x^k \mid x \in G \rangle.$$

Há uma relação muito útil entre os comutadores multilineares de peso  $k$  e a palavra  $\delta_k$ . Mais precisamente:

**Lema 1.1.12.** ([S3]) *Sejam  $k$  um inteiro positivo,  $G$  um grupo e  $w$  um comutador multilinear de peso  $k$ . Então todos os  $\delta_k$ -valores em  $G$  são também  $w$ -valores em  $G$ .*

Para uma demonstração desse fato, veja [S3, Lema 4.1].

**Observação 1.1.13.** *Para uma visão mais aprofundada e completa sobre variedades de grupos e subgrupos verbais veja H. Neumann [N] ou D. Segal [?].*

## 1.2 Propriedades de grupos

Definimos agora as principais classes de grupos estudadas ao longo do nosso trabalho. Especialmente, grupos residualmente finitos, localmente nilpotentes e localmente graduados.

**Definição 1.2.1.** *Seja  $\mathfrak{X}$  uma propriedade arbitrária de grupos. Seja  $G$  um grupo. Então:*

- *Dizemos que  $G$  é localmente- $\mathfrak{X}$  se todos os subgrupos finitamente gerados de  $G$  têm a propriedade  $\mathfrak{X}$ .*
- *Dizemos que  $G$  é residualmente- $\mathfrak{X}$  se*

$$\bigcap_{\substack{N \triangleleft G \\ G/N \in \mathfrak{X}}} N = \{1\}.$$

*Algumas vezes, escrevemos “residualmente  $\mathfrak{X}$ ” e “localmente  $\mathfrak{X}$ ”, sem incluir o hífen, especialmente quando não houver perigo de confundir a qual classe de grupos estamos nos referindo.*

Ao longo do texto os grupos localmente nilpotentes, residualmente finitos e residualmente- $p$  são as classes de grupos que vão aparecer com mais frequência. Seguem suas definições abaixo:

**Definição 1.2.2.** *Seja  $G$  um grupo.*

- *Dizemos que  $G$  é localmente nilpotente se todos os subgrupos finitamente gerado de  $G$  são nilpotentes.*

- *Dizemos que  $G$  é residualmente finito se*

$$\bigcap_{\substack{N \triangleleft G \\ |G/N| < \infty}} N = \{1\}.$$

- *Seja  $p$  um primo. Dizemos que  $G$  é residualmente- $p$  se*

$$\bigcap_{\substack{N \triangleleft G \\ |G/N| = p^k < \infty}} N = \{1\}.$$

**Observação 1.2.3.** *Com o intuito de não causar dubiedade, muitas vezes, quando estivermos escrevendo que um dado grupo é residualmente- $\mathfrak{X}$  ou localmente- $\mathfrak{X}$ , vamos escrever a propriedade entre parênteses. Por exemplo,*

- *$G$  é um grupo residualmente (nilpotente finito) significa que:*

$$\bigcap_{\substack{N \in \mathcal{F}(G) \\ G/N \in \mathcal{N}}} N = \{1\}.$$

onde  $\mathcal{F}(G) = \{N \triangleleft G \mid |G : N| < \infty\}$  e  $\mathcal{N}$  é a classe dos grupos nilpotentes finitos.

- *$G$  é localmente (solúvel-por-finito) se cada subgrupo finitamente gerado  $H$  de  $G$  possui um subgrupo solúvel  $K = K_H$ , o qual é normal em  $H$  e cujo grupo quociente  $H/K$  é finito.*

**Relembrando:** Sejam  $\mathfrak{X}_1$  e  $\mathfrak{X}_2$  classes de grupos. Como é usual na Teoria de grupos, dizemos que um grupo  $G$  é  $\mathfrak{X}_1$ -por- $\mathfrak{X}_2$  se existe um subgrupo normal  $H$  em  $G$  tal que

$$H \in \mathfrak{X}_1 \text{ e } G/H \in \mathfrak{X}_2.$$

Note que, a classe dos grupos residualmente finitos é “grande”, no sentido de conter diversas classes importantes de grupos. Vejamos alguns exemplos:



**Exemplo 1.2.4.** *Seja  $G$  um grupo.*

- (Hirsch) *Se  $G$  é policíclico, então  $G$  é residualmente finito.*

*Para uma demonstração desse fato, veja [R2, 5.4.17];*

- (Iwasawa) *Seja  $p$  um primo. Se  $G$  é um grupo livre, então  $G$  é residualmente- $p$ .*

*Para uma demonstração desse fato, veja [R2, 6.1.9].*

**Lema 1.2.5.** *Seja  $G$  um grupo residualmente (nilpotente finito) finitamente gerado. Consideramos, para cada primo  $p$ , o subgrupo  $R_p$  que é dado pela interseção de todos os subgrupos normais de  $G$  cujo índice é uma potência do primo  $p$ . Se  $G/R_p$  é um grupo nilpotente, para cada primo  $p$ , então  $G$  é nilpotente.*

O Lema acima é um caso particular do Lema 2.1 em [W]. Para uma demonstração desse fato, veja [S5, Lema 3.5].

## Conjuntos normais e conjuntos $c$ -fechados

Nessa seção também definimos *conjuntos normais* e *conjuntos  $c$ -fechados*. Tais definições são de grande importância no nosso estudo.

**Definição 1.2.6.** *Sejam  $G$  um grupo e  $X$  um subconjunto de  $G$ .*

- *Dizemos que  $X$  é um conjunto normal de  $G$  se*

$$x^g \in X$$

*sempre que  $x \in X$ , para todo  $g \in G$ ;*

- *Dizemos que  $X$  é um conjunto  $c$ -fechado de  $G$  se*

$$[x, y] \in X$$

*sempre que  $x, y \in X$ . Adotamos tal notação para adaptar ao termo em inglês: “commutator-closed set”.*

## Grupos localmente graduados

Aqui estamos interessados em uma certa classe de grupos que contém os grupos residualmente finitos.

**Definição 1.2.7.** Dizemos que um grupo  $G$  é localmente graduado se todo subgrupo finitamente gerado possui um subgrupo próprio de índice finito.

O resultado a seguir garante que todo grupo residualmente finito é, em particular, localmente graduado.

**Proposição 1.2.8.** Seja  $G$  um grupo. Se  $G$  é residualmente finito, então  $G$  é localmente graduado.

*Demonstração.* Seja  $H$  um subgrupo finitamente gerado de  $G$ . Digamos  $H = \langle h_1, \dots, h_r \rangle$ . Como  $G$  é residualmente finito, podemos obter subgrupos normais  $N_{h_1}, \dots, N_{h_r}$  tais que

$$h_i \notin N_{h_i} \text{ e } |G/N_{h_i}| < \infty$$

para cada  $i = 1, \dots, r$ . Agora, consideramos

$$N = \bigcap_{i=1}^r N_{h_i} \triangleleft G \text{ e } |G/N| < \infty.$$

Assim, usando o Teorema dos Homomorfismos

$$\frac{HN}{N} \simeq \frac{H}{H \cap N}.$$

Em particular,  $H \cap N$  tem índice finito em  $H$ . Como  $h_i \in H \setminus N$ ,  $i = 1, \dots, r$ , temos que  $H \cap N$  é um subgrupo próprio de  $H$ .  $\square$

**Observação 1.2.9.** Note que todos os grupos localmente finitos e localmente nilpotentes são localmente graduados. Portanto, existem grupos localmente graduados que não são residualmente finitos. Por exemplo, o grupo aditivo dos números racionais  $(\mathbb{Q}, +)$  é localmente cíclico e não é residualmente finito.

Acerca de tal classe de subgrupos cabe ressaltar algumas propriedades. Como grupos livres são residualmente finitos (em particular, grupos localmente graduados), temos que a classe dos grupos localmente graduado não é fechada para imagens homomórficas. Mas, o seguinte resultado de P. Longobardi, M. Maj e H. Smith [LMS], nos dá uma condição suficiente para que o

quociente de um grupo localmente graduado seja ainda um grupo localmente graduado.

**Lema 1.2.10.** (*Longobardi, Maj e Smith, [LMS]*) *Sejam  $G$  um grupo localmente graduado e  $N$  um subgrupo localmente nilpotente de  $G$ . Então  $G/N$  é localmente graduado.*

No **Apêndice A**, usando o Problema Restrito de Burnside, mostramos que todo grupo localmente graduado de expoente finito é localmente finito [M, Teorema 1].

## 1.3 Grupos Profinitos

A classe dos *grupos profinitos* é extensão da classe dos grupos finitos. E muitos dos teoremas que são verdadeiros para grupos finitos são comuns (com certas adaptações) para grupos profinitos, tais como Teorema de Lagrange [RZ, Proposição 2.3.2], Teorema de Sylow [RZ, Corolário 2.3.6], Teoremas de Hall, entre outros.

Nessa seção introduzimos algumas terminologias a respeito de *grupos topológicos*, especialmente grupos profinitos.

**Definição 1.3.1.** *Dizemos que uma terna  $(G, \cdot, \tau)$  é um grupo topológico se  $(G, \tau)$  é um espaço topológico e as aplicações:*

$$m : G \times G \rightarrow G \text{ com } m(g, h) \mapsto g \cdot h = gh \text{ e } \iota : G \rightarrow G \text{ com } \iota(g) = g^{-1}$$

*são aplicações contínuas (com respeito a topologia  $\tau$ ).*

Quando dizemos que  $G = (G, \cdot, \tau)$  é um grupo compacto, queremos dizer que  $(G, \cdot)$  é um grupo topológico e  $(G, \tau)$  é um espaço topológico compacto. Para maiores detalhes sobre espaços topológicos veja Kelley [K].

Para simplificar a escrita dos resultados e/ou suas demonstrações, adotamos algumas notações no contexto de grupos topológicos. Denotamos por  $K \leq_c G$  e  $H \leq_o G$ , que o subgrupo  $K$  é fechado em  $G$  e o subgrupo  $H$  é aberto em  $G$ .

Um das propriedades fundamentais de grupos compactos é a seguinte:

**Proposição 1.3.2.** *Seja  $G$  um grupo compacto. Se  $H \leq_o G$ , então  $H \leq_c G$  e  $|G : H| < \infty$ .*

Para uma demonstração desse fato, veja [DDMS, Proposição 0.17, pág. 08].

## Grupos Profinitos e pro- $\mathcal{C}$

**Definição 1.3.3.** Dizemos que um grupo  $G$  é profinito se ele é um grupo topológico compacto Hausdorff cujos subgrupos abertos formam uma base de vizinhanças da identidade.

Podemos ainda dar uma definição de grupos pro- $\mathcal{C}$  (incluindo os grupos profinitos), onde  $\mathcal{C}$  é uma classe de grupos finitos, baseada em limite inverso. Seja  $\mathcal{C}$  uma classe de grupos finitos. Definimos um pro- $\mathcal{C}$  grupo como sendo o limite inverso:

$$G = \varprojlim_{i \in I} G_i,$$

onde os grupos  $G_i$  são grupos na classe  $\mathcal{C}$  e cada  $G_i$  está sendo considerado munido com a topologia discreta. Dizemos que um grupo é profinito se for um grupo pro- $\mathcal{C}$ , onde  $\mathcal{C}$  é a classe de todos os grupos finitos. Para maiores detalhes sobre a construção e propriedades de limite inverso veja [RZ, Capítulo 1 e 2] ou [DDMS, págs. 16–18].

Além dos grupos profinitos, as classes de grupos pro- $\mathcal{C}$  que estudamos são as seguintes:

- 1) Sejam  $p$  um primo e  $\mathcal{F}_p$  a classe de todos os  $p$ -grupos finitos. Um grupo pro- $\mathcal{F}_p$  é chamado, simplesmente de *grupo pro- $p$* .
- 2) Seja  $\mathcal{N}$  a classe dos grupos nilpotentes finitos. Um grupo pro- $\mathcal{N}$  é chamado, simplesmente, de *grupo pronilpotente*.

Seguem alguns exemplos de grupos profinitos:

**Exemplo 1.3.4.**

- Grupos finitos munidos com a topologia discreta;
- Sejam  $p$  um primo e  $G$  um grupo. Consideramos  $\mathcal{N}_p$  o conjunto de todos os subgrupos normais de  $G$  cujo índice seja potência de  $p$ , isto é,

$$\mathcal{N}_p = \{N \triangleleft G \mid |G : N| = p^\alpha\}$$

Ordenamos tal conjunto pela inclusão “inversa”. Temos que o conjunto dos quocientes  $Q_p = \{G/N \mid N \in \mathcal{N}_p\}$  forma um sistema inverso de  $p$ -grupos finitos. Definimos o completamento pro- $p$  do grupo  $G$  como sendo o seguinte limite inverso:

$$\hat{G} := \varprojlim_{N \in \mathcal{N}_p} G/N;$$

- Seja  $p$  um primo.  $\mathbb{Z}_p$  o grupo dos inteiros  $p$ -ádicos;
- Seja  $p$  um primo.  $SL_n(\mathbb{Z}_p)$ ,  $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ ;

Para os detalhes sobre as construções desses exemplos, veja [DDMS, págs. 18–19].

**Definição 1.3.5.** *Seja  $G$  um grupo profinito. Denotamos por  $\pi(G)$  o conjunto dos primos que comparecem na fatoração de  $|G|$  (no sentido de números supernaturais [RZ, Capítulo 1]).*

**Lema 1.3.6.** *Sejam  $p$  um primo,  $d, k$  inteiros positivos e  $G$  um grupo profinito. Chamemos  $\pi = \pi(G)$  e  $X = \{[x_1, \dots, x_k]^d \mid x_i \in G\}$ . Se  $p$  e  $d$  são coprimos e  $p \in \pi$ , então  $X = G_{\gamma_k}$ .*

*Demonstração.* Usando um argumento de limite inverso (veja por exemplo [DDMS, Proposição 1.5]) podemos assumir que  $G$  é um grupo finito. Como  $p$  e  $d$  são coprimos, pelo resultado [GS, Teorema 3], segue que

$$X = \{[x_1, \dots, x_k]^d \mid x_i \in G\} = G_{\gamma_k} := \{[x_1, \dots, x_k] \mid x_i \in G\}.$$

□

Grupos pro- $p$  admitem um resultado análogo ao Teorema da base de Burnside para  $p$ -grupos finitos [R2, 5.3.2].

**Lema 1.3.7.** *Seja  $G$  um grupo pro- $p$  gerado por um conjunto  $X$ . Se  $G$  é  $m$ -gerado, então existem elementos  $x_1, \dots, x_m \in X$  tais que  $G = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ .*

*Demonstração.* Usando um argumento de limite inverso (veja por exemplo [DDMS, Proposição 1.5]), podemos assumir que  $G$  é um  $p$ -grupo finito. Agora, pelo Teorema da base de Burnside [R2, 5.3.2], existem elementos  $x_1, \dots, x_m \in X$  tais que  $G = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ . □

## Grupos $p$ -ádicos analíticos

Uma classe importante de grupos pro- $p$  são os grupos  $p$ -ádicos analíticos. Tais grupos tem muitas propriedades interessantes e tem papel importante no nosso estudo. Antes de definir o que vem a ser um grupo  $p$ -ádico analítico consideramos as seguintes definições:

**Definição 1.3.8.** *Seja  $G$  um grupo profinito.*

- Denotamos por  $d(G)$  o menor número de elementos de  $G$  que são necessários para gerar (topologicamente) o grupo  $G$ .
- Dizemos que  $G$  tem posto finito se

$$\sup \{d(H) \mid H \leq_c G\} < \infty.$$

Os grupos pro- $p$  que são  $p$ -ádicos analíticos podem ser definidos da seguinte forma:

**Definição 1.3.9.** Dizemos que um grupo pro- $p$  é  $p$ -ádico analítico se ele tem posto finito.

**Notação 1.3.10.** Quando  $G$  é um grupo de posto finito, denotamos por  $r(G)$  o posto do grupo  $G$ , ou seja:

$$r(G) = \sup \{d(H) \mid H \leq_c G\} < \infty.$$

Cabe ressaltar uma caracterização a qual evidencia a importância de tais grupos:

**Teorema 1.3.11.** Seja  $G$  um grupo pro- $p$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a)  $G$  é  $p$ -ádico analítico;
- (b)  $G \lesssim GL_n(\mathbb{Z}_p)$  (isto é,  $G$  é isomorfo a um subgrupo de  $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ ).

Para uma lista mais completa de equivalências e suas devidas demonstrações, veja [DDMS, págs. 97 e 98].

**Observação 1.3.12.** Muitas vezes, em vez de escrever  $G \lesssim GL_n(\mathbb{Z}_p)$ , escrevemos “ $G$  possui uma representação linear fiel sobre os números  $p$ -ádicos”.

**Teorema 1.3.13.** (Alternativa de Tits, [T, Corolário 1]) Seja  $G$  um grupo finitamente gerado. Suponhamos que  $G$  admite uma representação linear fiel sobre um corpo de característica 0. Então uma das seguintes afirmações é válida:

- (a)  $G$  possui um subgrupo solúvel de índice finito;
- (b)  $G$  possui um subgrupo isomorfo a um grupo livre não abeliano.

## 1.4 Resultados Lie-Teóricos

Com muita frequência, usamos métodos de “natureza” Lie-teórica nas demonstrações dos nossos resultados. Apresentamos as definições e resultados que são usados ao longo do texto.

**Definição 1.4.1.** *Sejam  $L$  um conjunto e  $\mathbb{F}$  um corpo. Dizemos que  $L$  é uma álgebra de Lie (sobre  $\mathbb{F}$ ) se,*

- $L$  é um  $\mathbb{F}$ -espaço vetorial;
- em  $L$  podemos definir um produto bilinear que chamamos de colchete de Lie, o qual é denotado por  $[\cdot, \cdot]$ , e tem as seguintes propriedades:

▷ (Identidade de Jacobi) Para todos  $x, y, z \in L$ , temos

$$[x, y, z] + [y, z, x] + [z, x, y] = 0;$$

▷ (Anti-simétrica) Para todo  $x \in L$ , temos  $[x, x] = 0$ .

Muitas vezes nos referimos ao colchete de dois elementos, como sendo o comutador (de Lie) de tais elementos.

**Notação 1.4.2.** *Seja  $L$  uma álgebra de Lie. Adotamos a notação cujos comutadores são tomados “à esquerda”. Ou seja, se  $l_1, \dots, l_n$  são elementos de  $L$  então*

$$[l_1, \dots, l_n] = [\dots [[l_1, l_2], l_3], \dots, l_n].$$

**Definição 1.4.3.** *Sejam  $L$  uma álgebra de Lie e  $a \in L$ . Dizemos que  $a$  é ad-nilpotente se existe um inteiro positivo  $n = n(a)$  de tal forma que*

$$[x, \underbrace{a, \dots, a}_{n \text{ vezes}}] = 0$$

para todo  $x \in L$ . Se  $n$  é o menor inteiro com a propriedade acima, então dizemos que  $a$  é ad-nilpotente de índice  $n$ .

Sejam  $L$  uma álgebra de Lie e  $X$  um subconjunto arbitrário de  $L$ . Dizemos que  $h \in L$  é um comutador nos elementos de  $X$  se  $h$  pode ser escrito a partir de algum sistema de colchetes de Lie nos quais os únicos elementos que aparecem são elementos de  $X$ .

Seja  $L$  uma álgebra de Lie sobre um corpo  $\mathbb{F}$ . Denotamos por  $\mathcal{F}$  a álgebra de Lie livre (sobre  $\mathbb{F}$ ) sobre uma quantidade enumerável de geradores livres  $x_1, x_2, \dots$ .

**Definição 1.4.4.** *Seja  $f = f(x_1, \dots, x_n)$  um elemento não trivial de  $\mathcal{F}$ . Dizemos que uma álgebra  $L$  satisfaz a identidade  $f \equiv 0$  se*

$$f(l_1, \dots, l_n) = 0,$$

*para todos  $l_1, \dots, l_n \in L$ . Nesse caso, dizemos que  $L$  é PI, ou que  $L$  satisfaz uma identidade polinomial não trivial.*

Aqui cabe ressaltar um importante critério de nilpotência para álgebras de Lie:

**Teorema 1.4.5.** *(Zelmanov, [Z]) Seja  $L$  uma álgebra de Lie gerada pelos elementos  $l_1, \dots, l_m$ . Se  $L$  é PI e todos os comutadores em  $\{l_1, l_2, \dots, l_m\}$  são ad-nilpotentes, então  $L$  é nilpotente.*

Tal resultado é muito importante na Teoria de álgebras de Lie e tem inúmeras aplicações na Teoria dos Grupos.

## Álgebra de Lie associada a um grupo $G$

Sejam  $i$  um inteiro positivo,  $p$  um primo e  $G$  um grupo. Denotamos por  $D_i = D_i(G)$  o seguinte subgrupo de  $G$ :

$$D_i = \langle g^{p^j} \mid g \in \gamma_c(G), \text{ onde } cp^j \geq i \rangle.$$

Tais subgrupos formam uma série central de  $G$ , chamada série de *Zassenhaus-Jennings-Lazard* (ou abreviadamente, série ZJL). Definimos a álgebra de Lie associada a série ZJL do grupo  $G$  da seguinte forma:

$$L(G) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \frac{D_i}{D_{i+1}}.$$

Seja  $\mathbb{F}_p$  um corpo com  $p$  elementos. Assim,  $L(G)$  pode ser vista como uma álgebra de Lie sobre  $\mathbb{F}_p$ , onde o colchete de Lie,  $[\cdot, \cdot]$ , é definido inicialmente nos elementos homogêneos  $aD_{i+1}$  e  $bD_{j+1}$  como sendo

$$[aD_i, bD_j] = [a, b]D_{i+j+1}.$$

Para os demais elementos em  $L(G)$ , podemos estender o colchete por linearidade. Para mais informações acerca de álgebras de Lie, veja [S2, págs. 375–380] ou [DDMS, Capítulos 11 e 12].



**Notação 1.4.6.**

- Denotamos por  $\delta(x)$  o grau do elemento  $x$  com respeito a série ZJL, ou seja,  $\delta(x)$  é o inteiro positivo  $i$  tal que  $x \in D_i \setminus D_{i+1}$  (veja [WZ] para mais detalhes).
- Para um elemento  $x \in D_i \setminus D_{i+1}$ . Denotamos por  $\tilde{x}$  o elemento  $x D_{i+1} \in L(G)$ .

**Observação 1.4.7.** (Cálculos de comutadores) Sejam  $n$  um inteiro positivo e  $F = F(x, y, z)$  o grupo livre nas variáveis  $x, y, z$ . Então, o comutador  $[xz, {}_n y]$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$[x, {}_n y][z, {}_n y]v(x, y, z)$$

onde  $v$  é o produto de comutadores de peso, no mínimo,  $n+2$ . Sendo que tal comutador envolve as variáveis  $x, z$  e envolve ainda  $y$  pelo menos  $n$  vezes. A demonstração dessa observação segue por indução sobre  $n$ .

O enunciado do Lema a seguir foi retirado do artigo [S5, Lema 2.4]. A prova do Lema, bem como a Observação 1.4.7, segue como consequência da demonstração de um dos resultados em [WZ, Seção 3]. Com o intuito de simplificar a leitura, apresentamos a demonstração explicitamente.

**Lema 1.4.8.** *Seja  $G$  um grupo pro- $p$ . Se  $x$  é um elemento Engel, então  $\tilde{x}$  é ad-nilpotente.*

*Demonstração.* Para cada inteiro positivo  $n$  consideramos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \Psi_n : G &\longrightarrow G \\ a &\longmapsto [a, \underbrace{x, \dots, x}_{(n) \text{ vezes}}]. \end{aligned}$$

Temos que  $\Psi_n$  é uma aplicação contínua. Consideramos, para cada inteiro positivo  $n$  o seguinte subconjunto:

$$T_n := \Psi_n^{-1}(1) = \{a \in G \mid [a, {}_n x] = 1\}.$$

Dessa forma, cada  $T_n$  é um subconjunto fechado de  $G$ . Como  $x$  é um elemento Engel, temos que o grupo  $G$  é a união de uma quantidade enumerável de subconjuntos fechados,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n = G.$$

Pelo Teorema da Categoria de Baire (veja por exemplo [K, p. 200]), existe um subconjunto aberto de  $G$  em algum dos  $T_n$ 's. Daí, podemos obter um inteiro positivo  $n$ , um elemento  $a \in G$  e um subgrupo aberto  $H$  de  $G$  de tal sorte que

$$[ah, {}_n x] = 1,$$

para todo elemento  $h \in H$ . Em particular, podemos considerar  $H \triangleleft G$  (veja, por exemplo [DDMS, B2, pág. 358]) e temos

$$[ah, {}_n x] = [a, {}_n x][h, {}_n x]v(a, x, h),$$

onde  $v$  é um produto de comutadores de  $G$  (veja a Observação 1.4.7). Nesse caso, temos ainda:

$$\delta(v(a, x, h)) \geq \delta(a) + n\delta(x) + \delta(h),$$

para cada  $h \in H$ . Chamemos  $|G : H| = p^k$ . Dado um elemento  $g \in G$ , temos que o comutador  $h_0 = [g, {}_k x] \in H$  e  $\delta(h_0) \geq \delta(g) + k\delta(x)$ . Assim, pela Observação 1.4.7,  $[h_0, {}_n x] = v(a, x, h_0)^{-1}$ . Agora, vamos fazer uma estimativa para  $\delta([h_0, {}_n x])$ ,

$$\begin{aligned} \delta([g, {}_{n+k} x]) &= \delta([h_0, {}_n x]) = \delta(v(a, x, h_0)^{-1}) \\ &\geq \delta(h_0) + \delta(a) + n\delta(x) \\ &\geq \delta(g) + k\delta(x) + n\delta(x) + \delta(a) \\ &\geq \delta(g) + (k+n)\delta(x) + 1, \end{aligned}$$

com isso temos que  $\tilde{x}$  é ad-nilpotente (de índice  $\leq n+k$ ). □

**Lema 1.4.9.** (Lazard [L, pág. 131]) *Sejam  $G$  um grupo e  $x \in G$ . Então  $(ad \tilde{x})^p = ad(\tilde{x}^p)$ .*

**Notação 1.4.10.** *Seja  $L(G)$  a álgebra de Lie associada a um grupo  $G$ . Denotamos por  $L_p(G)$  a subálgebra de Lie gerada pela componente  $D_1/D_2$ .*

Informações importantes do grupo  $G$  podem ser obtidas a partir da nilpotência da álgebra de Lie  $L_p(G)$ . Por exemplo, um resultado muito importante devido a Lazard [L2] relaciona uma dada propriedade estrutural de um grupo pro- $p$  finitamente gerado  $G$  com a estrutura da sua álgebra de Lie  $L_p(G)$ .

**Teorema 1.4.11.** (Lazard, [L2]) *Seja  $G$  um grupo pro- $p$  finitamente gerado. Se  $L_p(G)$  é nilpotente, então  $G$  é grupo  $p$ -ádico analítico.*

Como é de se esperar, temos que as propriedades estruturais de um grupo tem fortes implicações na álgebra de Lie  $L_p(G)$ . Uma condição útil para garantir que uma dada álgebra de Lie satisfaz uma identidade polinomial foi dado por J. Wilson e E. I. Zelmanov [WZ].

**Definição 1.4.12.** *Sejam  $G$  um grupo e  $H$  um subgrupo de índice finito em  $G$ . consideramos  $w = w(x_1, \dots, x_s)$  uma palavra de grupo e elementos  $g_1, \dots, g_s \in G$ . Dizemos que  $w$  é uma identidade de classe sobre  $g_1H, \dots, g_sH$ , se*

$$w(g_1h_1, \dots, g_sh_s) = 1,$$

*para todos  $h_1, \dots, h_s \in H$ .*

**Teorema 1.4.13** (Wilson, Zelmanov, [WZ]). *Sejam  $G$  um grupo,  $H$  um subgrupo de índice finito e  $a_1, \dots, a_n \in G$ . Se  $w$  é uma identidade de classe sobre  $a_1H, \dots, a_nH$ , então para qualquer primo  $p$  a álgebra de Lie  $L_p(G)$  é PI.*

Em particular, podemos obter o seguinte corolário:

**Corolário 1.4.14.** *Seja  $G$  um grupo. Se  $G$  satisfaz uma identidade de grupo  $w \equiv 1$ , então  $L_p(G)$  é PI.*

**Observação 1.4.15.** *Uma referência mais completa acerca de aplicações de álgebras de Lie em Teoria dos Grupos veja o artigo [S2].*

## CAPÍTULO 2

---

### Condições de Engel

---

Nosso objetivo é estudar propriedades que generalizam o conceito de nilpotência. Mais precisamente, condições de Engel. Nesse capítulo, fazemos um apanhado dos resultados que usamos ao longo do texto acerca de grupos e elementos Engel.

### 2.1 Condições de Engel

**Definição 2.1.1.** *Sejam  $n$  um inteiro positivo e  $G$  um grupo.*

- *Dizemos que  $g$  é  $n$ -Engel se*

$$[x, {}_n g] = [x, \underbrace{g, \dots, g}_{n \text{ vezes}}] = 1,$$

*para todo  $x \in G$ . Algumas vezes dizemos que  $g \in G$  é Engel limitado, sem explicitar o número  $n$ .*

- *Dizemos que  $g$  é Engel, se para qualquer  $x \in G$  existe  $n_x = n(x, g) \geq 1$  tal que*

$$[x, {}_{n_x} g] = [x, \underbrace{g, \dots, g}_{n_x \text{ vezes}}] = 1.$$

**Definição 2.1.2.** *Seja  $G$  um grupo.*

- *Seja  $n$  um inteiro positivo. Dizemos que  $G$  satisfaz a  $n$ -ésima condição de Engel (ou simplesmente,  $G$  é  $n$ -Engel) se todos os seus elementos são  $n$ -Engel. Equivalentemente,  $G$  satisfaz a identidade*

$$[x, {}_n y] = [x, \underbrace{y, \dots, y}_{n \text{ vezes}}] = 1,$$

*para todos  $x, y \in G$ .*

- *Dizemos que  $G$  é um grupo Engel limitado, se todo elemento  $x$  de  $G$  é  $n$ -Engel, para algum inteiro positivo  $n = n(x)$ .*
- *Dizemos que  $G$  é um grupo Engel, se todos os elementos de  $G$  são Engel.*

**Observação 2.1.3.** *Definimos todos os nossos conceitos de Engelianidade à esquerda, mas existem ainda definições clássicas à direita, na qual, o elemento  $g \in G$  é dito  $n$ -Engel à direita se*

$$[g, {}_n x] = 1$$

*para todo  $x \in G$ . Também poderíamos definir: “ $g$  é Engel à direita”, etc. Entretanto, esse não será o nosso objetivo e, no nosso contexto, sempre estamos considerando nossas definições “à esquerda”. Para maiores detalhes sobre elementos Engel à direita veja [R, Capítulo 7].*

**Notação 2.1.4.** *Seja  $G$  um grupo.*

- *Denotamos por  $\varepsilon(G)$  o conjunto de todos os elementos Engel de  $G$ .*
- *Denotamos por  $\bar{\varepsilon}(G)$  o conjunto de todos os elementos Engel limitados de  $G$ .*
- *Dado  $n$  um inteiro positivo. Denotamos por  $\varepsilon_n(G)$  o conjunto de todos os elementos  $n$ -Engel de  $G$ .*

**Observação 2.1.5.** *Naturalmente, temos o seguinte conjunto de inclusões:*

$$\varepsilon_n(G) \subseteq \bar{\varepsilon}(G) \subseteq \varepsilon(G),$$

*para cada inteiro positivo  $n$ . Em particular,*

$$\bar{\varepsilon}(G) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_n(G).$$

A proposição a seguir nos diz que existem elementos  $n$ -Engelianos e elementos Engel. Mais ainda, são encontrados como elementos em subgrupos normais nilpotentes e subgrupos normais localmente nilpotentes, respectivamente.

**Proposição 2.1.6.** *Sejam  $G$  um grupo e  $N \triangleleft G$ .*

i) *Se  $g \in N$  e  $N$  é nilpotente, de classe  $\leq n$ , então  $g$  é  $(n+1)$ -Engel.*

ii) *Se  $N$  é localmente nilpotente e  $g \in N$ , então  $g$  é Engel.*

*Demonstração.*

**Dem.i)** Dado  $x \in G$ . Temos  $[x, g] \in N$ , pois  $N$  é normal em  $G$ .

Como  $N$  é nilpotente de classe no máximo  $n$ , segue

$$[[x, g], \underbrace{g, \dots, g}_{n \text{ vezes}}] = 1.$$

Com isso, o elemento  $g$  é  $(n+1)$ -Engel em  $G$ .

**Dem.ii)** Dado  $x \in G$ . Temos  $[x, g] \in N$ , pois  $N$  é normal em  $G$ .

Como  $N$  é localmente nilpotente, segue que

$$H = \langle [x, g], g \rangle$$

é nilpotente, digamos de classe  $n = n([x, g], g)$ . E, em particular,

$$[[x, g],_n g] = 1.$$

Mais geralmente, para cada escolha de elemento  $x \in G$ , podemos associar um subgrupo  $H_x$  gerado por  $[x, g]$  e  $g$ . Chamamos a classe de nilpotência de  $H_x$  de  $n_x = n([x, g], g)$ . Daí,

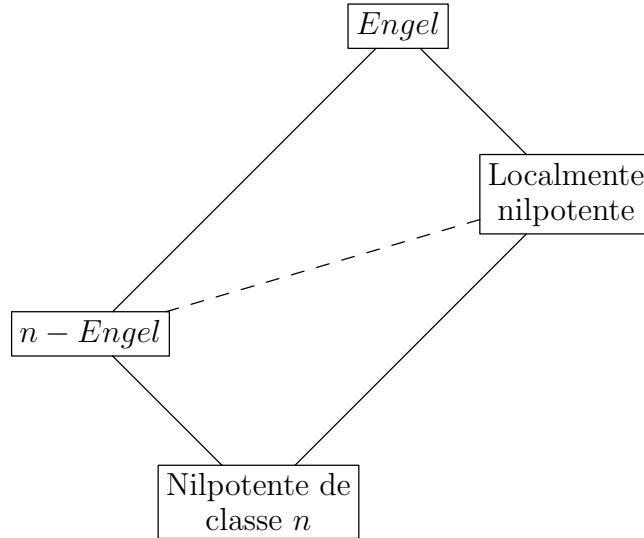
$$[[x, g],_{n_x} g] = 1.$$

□

Naturalmente, todo grupo  $n$ -Engel é Engel e todo grupo localmente nilpotente é Engel. Entretanto, não sabemos se a classe dos grupos  $n$ -Engel forma uma subclasse dos localmente nilpotentes. Na verdade, tal questão é uma das conjecturas mais importantes relacionadas as condições de Engel. Explicitamente:

**Conjectura 2.1.7.** (*E. Plotkin, [Kh.M, Problema 14.70]*) Seja  $n$  um inteiro positivo. Se  $G$  é um grupo  $n$ -Engel, então  $G$  é localmente nilpotente.

Sem restrições adicionais, salvo para  $n = 2, 3$  e  $4$ , a Conjetura 2.1.7 permanece em aberto. O diagrama a seguir descreve as relações de inclusões nas classes de grupos nilpotentes, localmente nilpotentes e Engelianos.



para cada inteiro positivo  $n$ .

Em certas classes de grupos é sabido que a Conjectura é verdadeira. Por exemplo, J. Wilson [W], mostrou que todo grupo residualmente finito  $n$ -Engel é localmente nilpotente. Temos ainda que grupos localmente graduados  $n$ -Engel são localmente nilpotentes (Y. Kim e A. H. Rhemtulla [KR]). Adicionalmente, em certas classes de grupos Engelianidade é suficiente garantir que o grupo é localmente nilpotente. Por exemplo, grupos finitos Engel (M. Zorn, [R2, 12.3.4]) ou, mais geralmente, grupos Engel satisfazendo a condição maximal (R. Baer, [R2, 12.3.2]) são nilpotentes. Ou ainda, grupos Engel que sejam solúveis (K. Gruenberg, [GK]) ou profinitos (J. Wilson e E. I. Zelmanov, [WZ, Teorema 5]) ou compactos (Y. Medvedev, [MY]) são localmente nilpotentes.

## 2.2 Radical de Hirsch-Plotkin

Duas questões são centrais no estudo dos elementos Engelianos, são elas:

- a) Sob que hipóteses temos que o radical de Hirsch-Plotkin  $HP(G)$  de um grupo  $G$  coincide com o conjunto de todos os elementos Engel de  $G$ ;
- b) Ou sob que condições temos que  $\varepsilon(G)$  é um subgrupo de  $G$ .

Para uma referência na qual possui um apanhado com os principais avanços recentes, veja o artigo [A].

Para grupos localmente nilpotentes temos um resultado análogo ao Teorema de Fitting [R2, 5.2.8, pág. 133]:

**Proposição A.** (Hirsch e Plotkin) Sejam  $G$  um grupo. Se  $H$  e  $K$  são subgrupos normais localmente nilpotentes de  $G$ , então  $J = HK$  é localmente nilpotente.

Para uma demonstração desse fato, veja [R2, 12.1.2]. Um corolário imediato dessa Proposição é a seguinte:

**Proposição A'.** Em um grupo  $G$  existe um único subgrupo normal maximal localmente nilpotente (chamado *radical de Hirsch-Plotkin*), contendo todos os subgrupos normais localmente nilpotentes de  $G$ .

Para uma demonstração, veja [R2, 12.1.3].

**Notação 2.2.1.**  $HP(G)$  denotará o radical de Hirsch-Plotkin de  $G$  (dado na **Proposição A** e **Proposição A'**)

Em particular, pela Proposição 2.1.6, temos que

$$HP(G) \subseteq \varepsilon(G).$$

Para certas classes de grupos tais conjuntos coincidem, tais como para grupos finitos. Apresentamos alguns resultados onde a igualdade ocorre, especialmente, aqueles que usamos no decorrer do trabalho.

**Definição 2.2.2.** Dizemos que um grupo  $G$  satisfaz a condição maximal se todo conjunto não vazio de subgrupos de  $G$ , parcialmente ordenado pela inclusão, possui um elemento maximal.

**Teorema 2.2.3.** (Baer) Seja  $G$  um grupo satisfazendo a condição maximal. Então  $HP(G)$  é nilpotente. Mais ainda, os conjuntos  $\bar{\varepsilon}(G)$ ,  $\varepsilon(G)$  e  $HP(G)$  coincidem.



Para uma demonstração, veja [R2, 12.3.7]. Podemos obter um resultado análogo para grupos localmente finitos.

**Corolário 2.2.4.** *Seja  $G$  um grupo localmente finito. Então  $HP(G) = \varepsilon(G)$ .*

*Demonstração.* Já sabemos que  $HP(G) \subseteq \varepsilon(G)$ . Resta mostrar a outra inclusão. Seja  $x \in \varepsilon(G)$ . Vamos mostrar que  $A = \langle x^g \mid g \in G \rangle$  é localmente nilpotente. Tomamos uma quantidade finita e arbitrária de elementos em  $G$ , digamos  $g_1, \dots, g_s \in G$ . Vamos mostrar que

$$H = \langle x^{g_1}, \dots, x^{g_s} \rangle.$$

é nilpotente. Como  $G$  é localmente finito e  $H$  é finitamente gerado, temos que  $H$  é finito. Por outro lado, cada  $x^{g_i} \in \varepsilon(G)$ , pois  $x$  é Engel. Portanto,  $A$  é localmente nilpotente. Em particular,  $x \in HP(G)$  e isso conclui a demonstração.  $\square$

**Teorema 2.2.5.** *(Gruenberg) Seja  $G$  um grupo solúvel. Então  $\varepsilon(G) = HP(G)$ .*

Para uma demonstração, veja [R2, 12.3.3]. Naturalmente, como corolário desse resultado, podemos obter um análogo para grupos localmente solúveis.

**Corolário 2.2.6.** *Seja  $G$  um grupo localmente solúvel. Então  $HP(G) = \varepsilon(G)$ .*

*Demonstração.* Chamemos  $E = \varepsilon(G)$ . Basta mostrar que  $E$  é localmente nilpotente. Escolha uma quantidade finita e arbitrária de elementos em  $E$ , digamos  $y_1, \dots, y_r \in E$ . Assim, existem  $x_1, \dots, x_s \in \varepsilon(G)$  tais que

$$\langle y_1, \dots, y_r \rangle \subseteq H = \langle x_1, \dots, x_s \rangle.$$

Por hipótese,  $H$  é solúvel. Pelo Teorema 2.2.5,  $HP(H) = \varepsilon(H)$  e como  $x_i \in HP(G)$ , para cada  $i = 1, \dots, s$ . Temos que  $H$  é nilpotente. Como os elementos de  $G$  foram tomados arbitrariamente, segue que  $E$  é localmente nilpotente.  $\square$

## Cadeias de Subgrupos

De modo geral, o estudo dos elementos Engel de um dado grupo  $G$  é bastante influenciado pela estrutura dos seus quocientes. Aqui apresentaremos um

resultado muito importante devido a B.I. Plotkin que assegura a igualdade  $HP(G) = \varepsilon(G)$  caso o grupo  $G$  tenha uma certa série de subgrupos cujos fatores são localmente nilpotentes.

A série nilpotente superior de um grupo  $G$  é dada por

$$1 = U_0(G) \leq U_1(G) \leq \dots$$

onde  $U_1(G) = \text{Fit}(G)$  que é o subgrupo gerado por todos os subgrupos normais nilpotentes de  $G$  e cada  $U_{i+1}$  é obtido como sendo o seguinte subgrupo de  $G$ :

$$U_{i+1}/U_i = \text{Fit}(G/U_i)$$

para cada  $i \in \mathbb{N}$ .

**Observação 2.2.7.** *Seja  $G$  um grupo.*

- Dizemos que  $G$  tem altura de Fitting  $m$  se  $U_m(G) = G$  e  $U_{m-1}(G) < G$ . Em particular, denotamos a altura de Fitting de  $G$  por  $h(G)$ .
- Naturalmente, se  $G$  é um grupo simples finito e não abeliano, então  $U_n(G) < G$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . E, nesse caso, não estaria definida a altura de Fitting do grupo  $G$ .

No nosso estudo estamos particularmente interessados em grupos que possuem uma série finita de subgrupos cujos fatores são localmente nilpotentes. Com isso, de modo análogo a “série localmente nilpotente superior” de um grupo, podemos definir a seguinte série:

**Definição 2.2.8.** *Seja  $G$  um grupo.*

- Definimos a série de Hirsch-Plotkin superior de  $G$  como sendo

$$1 \leq R_1 \leq R_2 \leq \dots$$

onde  $R_1 = HP(G)$  é o radical de Hirsch-Plotkin e cada  $R_\alpha$  é obtido como sendo o seguinte subgrupo de  $G$ :

$$R_\alpha/R_{\alpha-1} = HP(G/R_{\alpha-1}).$$

E para um limite ordinal  $\lambda$ :

$$R_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} R_\alpha.$$

*Dizemos que um grupo  $G$  é radical se ele coincide com algum termo da sua série de Hirsch-Plotkin superior.*

**Teorema 2.2.9.** (Plotkin) *Seja  $G$  um grupo. Se  $G$  é radical, então  $\varepsilon(G) = HP(G)$ .*

Para uma demonstração, veja [R, Teorema 7.34].

**Observação 2.2.10.** *Aqui cabe ressaltar que, em geral,  $HP(G) \subsetneq \varepsilon(G)$ . Nesse ponto, podemos citar um dos exemplos mais importantes associados a Engelianidade que é o famoso exemplo de E. S. Golod e I. R. Shafarevich.*

**Exemplo 2.2.11.** (Golod e Shafarevich, [G]) *Se  $n \geq 3$ , então existe um grupo  $G$   $n$ -gerado Engel não-nilpotente.*

Na verdade, tais exemplos são ainda mais fortes. Esses grupos são, adicionalmente:  *$p$ -grupos, residualmente finitos e periódicos!* E foram os primeiros contra-exemplos de grupos finitamente gerados periódicos que não são finitos. Tal problema é o célebre **Problema Irrestrito de Burnside** ou **Problema Geral de Burnside**. O **Apêndice A** contém os enunciados dos Problemas de Burnside e umas referências históricas. Para uma referência completa, veja [GN].

Com isso, em geral, grupos podem conter elementos Engelianos fora do radical de Hirsch-Plotkin. E nosso objetivo central será obter condições para que dados elementos Engel sejam elementos do radical de Hirsch-Plotkin.

## 2.3 Elementos Engelianos

Salvo menção em contrário, todos os resultados que apresentamos nessa seção foram descritos em [BSTT].

**Notação 2.3.1.** *Sejam  $H$  um subgrupo de um grupo  $G$  e  $Y$  um subconjunto de  $G$ . Denotamos por  $H^Y$  o menor subgrupo de  $G$  contendo  $H$  e normalizado por  $Y$ . Isto é, se  $g \in H^Y$ , então  $g^y \in H^Y$ , para todo  $y \in Y$ .*

**Lema 2.3.2.** *Sejam  $G$  um grupo e  $x, y \in G$ . Se*

$$[x, {}_n y^m] = 1,$$

*para inteiros positivos  $n$  e  $m$ , então o subgrupo  $\langle x \rangle^{\langle y \rangle}$  é finitamente gerado.*

*Demonstração.* Nossa demonstração será feita em duas partes.

**Parte 1:** (Exercício 12.3.6, [R2]) Se  $[x, {}_n y] = 1$ , então  $\langle x \rangle^{\langle y \rangle}$  é finitamente gerado.

É suficiente mostrar que:

$$x^{y^{n+1}} \in \langle x, x^y, \dots, x^{y^n} \rangle.$$

Pois, nesse caso,  $x^{y^j} \in \langle x, x^y, \dots, x^{y^n} \rangle$ , para todo  $j \geq n+1$ . Vamos demonstrar usando indução sobre  $n$ .

**Caso  $n = 1$ .** Temos que  $x$  e  $y$  comutam. Portanto,  $x^y = x$  e

$$\langle x \rangle^{\langle y \rangle} = \langle x \rangle,$$

que, em particular, é finitamente gerado.

**Caso  $n = 2$ .** Temos que  $[x, y, y] = 1$ . Assim,  $(x^{-1})^y x (x^{-1})^y x^{y^2} = 1$  e, consequentemente,

$$x^{y^2} = x^y x^{-1} x^y \in \langle x, x^y \rangle.$$

Daí,

$$x^{y^3} = (x^{y^2})^y = x^{y^2} (x^{-1})^y x^{y^2} \in \langle x, x^y, x^{y^2} \rangle.$$

Suponhamos que o resultado vale para  $n = k \geq 2$ . Agora vamos mostrar que o resultado vale para  $n = k+1$ . Observamos  $[[x, y], {}_k y] = 1$ , portanto,

$$[x, y]^{y^k} \in \langle [x, y], [x, y]^y, \dots, [x, y]^{y^{k-1}} \rangle \subseteq \langle x, x^y, \dots, x^{y^k} \rangle =: K.$$

Logo,

$$c = [x, y]^{y^k} = (x^{-1})^{y^k} x^{y^{k+1}},$$

com  $c \in K$ . Finalmente,  $x^{y^{k+1}} = x^{y^k} c \in K$ .

**Parte 2:** Chamamos  $X = \langle x \rangle^{\langle y^m \rangle}$ . Pela **Parte 1**, temos que  $X$  é finitamente gerado. Por outro lado,

$$\langle x \rangle^{\langle y \rangle} = \langle X^{y^i} \mid i = 0, \dots, m-1 \rangle,$$

que é finitamente gerado. □

Como consequência imediata do Lema anterior, temos o seguinte:

**Corolário 2.3.3.** *Sejam  $G$  um grupo,  $m$  um inteiro positivo e  $y \in G$ . Se  $H \leq G$  é finitamente gerado e  $y^m$  é Engel, então  $H^{\langle y \rangle}$  é finitamente gerado.*

**Lema 2.3.4.** *Se  $G$  é um grupo gerado por dois elementos  $x$  e  $y$ , então*

$$G' = \langle [x, y]^{x^r y^s} \mid r, s \in \mathbb{Z} \rangle.$$

*Demonstração.* Seja  $N = \langle [x, y]^{x^r y^s} \mid r, s \in \mathbb{Z} \rangle$ . Naturalmente,  $N^y$  e  $N^{y^{-1}}$  estão contidos em  $N$ . Para mostrar que  $N \triangleleft G$ , vamos mostrar que  $N^x \subseteq N$ . Mais ainda,

$$[x, y]^{x^r y^s x} = [x, y]^{x^{r+1} y^s [y^s, x]} = [y^s, x]^{-1} [x, y]^{x^{r+1} y^s} [y^s, x].$$

Temos que

$$[y^s, x] = [y, x]^{y^{s-1}} [y, x]^{y^{s-2}} \cdots [y, x],$$

para todo  $s \geq 1$ . Assim  $N^x \leq N$ . De modo análogo, temos  $N^{x^{-1}} \leq N$  e, consequentemente,  $N$  é um subgrupo normal em  $G$ . Daí,  $G' = N$ .  $\square$

**Lema 2.3.5.** *Sejam  $m$  um inteiro positivo e  $G$  um grupo gerado por um conjunto finito  $X$ . Se  $x^m$  é um elemento Engel para todo  $x \in X$ , então  $G'$  é finitamente gerado.*

*Demonstração.* Suponhamos que  $X = \{x, y\}$ . Pelo Lema 2.3.4, temos

$$G' = \langle [x, y]^{x^r y^s} \mid r, s \in \mathbb{Z} \rangle$$

e, pelo Corolário 2.3.3, segue que  $(\langle [x, y] \rangle^{\langle x \rangle})^{\langle y \rangle}$  é finitamente gerado. Agora, consideramos  $X = \{x_1, \dots, x_{d+1}\}$ , com  $d \geq 2$  e suponhamos que o resultado é válido para subgrupos com até  $d$  geradores. Tomamos, para cada  $i = 1, \dots, d+1$ , o respectivo subgrupo:

$$G_i = \langle x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{d+1} \rangle.$$

Por hipótese de indução, segue que cada  $G'_i$  é finitamente gerado. Novamente, pelo Corolário 2.3.3, segue que  $(G'_i)^{\langle x_i \rangle}$  é, ainda, finitamente gerado. Como o grupo  $G$  é gerado pelos elementos  $x \in X$ , temos que o subgrupo

$$K = \langle (G'_i)^{\langle x_i \rangle} \mid i = 1, \dots, d+1 \rangle$$

é normal em  $G$ . Logo,  $K = G'$ , que é finitamente gerado.  $\square$

O próximo resultado nos garante que em um grupo finitamente gerado no qual temos propriedades adicionais em certas potências e em seus geradores, podemos garantir que os termos da série derivada são ainda finitamente gerados.

**Corolário 2.3.6.** *Sejam  $m$  um inteiro positivo e  $X$  um conjunto normal e  $c$ -fechado de elementos de um grupo  $G$ . Suponhamos que  $G$  é gerado por um número finito de elementos de  $X$ . Se  $x^m$  é Engel, para todo  $x \in X$ , então todos os termos da série derivada de  $G$  são finitamente gerados.*

*Demonstração.* Pelo Lema 2.3.5, temos que o subgrupo derivado  $G'$  é finitamente gerado. Agora, suponhamos que  $G^{(k)}$  é finitamente gerado, para um dado  $k \geq 1$ . Como o conjunto  $X$  é normal e  $c$ -fechado, segue que  $G^{(k)}$  é gerado por uma quantidade finita de elementos de  $X$ . Aplicando novamente o Lema 2.3.5, segue que  $G^{(k+1)}$  é ainda finitamente gerado.  $\square$

O objetivo final desse capítulo é demonstrar o seguinte resultado:

**Proposição 2.3.7.** *Seja  $G$  um grupo gerado por um conjunto de elementos Engel. Se  $G^{(k)}$  é localmente solúvel para algum inteiro positivo  $k$ , então  $G$  é localmente nilpotente.*

Antes de demonstrar essa proposição, vamos demonstrar o seguinte lema técnico.

**Lema 2.3.8.** *Sejam  $G$  um grupo gerado por um conjunto de elementos Engel e  $H$  um subgrupo normal localmente solúvel de  $G$ . Então  $[H, G]$  é localmente nilpotente.*

*Demonstração.* Seja  $X$  um conjunto de elementos Engel tal que  $G = \langle X \rangle$ . Consideramos  $N$  o subgrupo gerado pelos elementos obtidos de  $[H, x]$ , onde  $x$  está variando no conjunto  $X$ . Daí,  $N \leq H$  e temos ainda  $[H, x] \leq N$ . Note que cada  $x \in X$  normaliza  $N$ . Como  $G$  é gerado por  $X$ , temos que  $N$  é subgrupo normal de  $G$  e, conseqüentemente,  $N = [H, G]$ . Daí, é suficiente mostrar que  $[H, x]$  é localmente nilpotente, para cada  $x \in X$ , visto que:

$$N = \langle [H, x] \mid x \in X \rangle.$$

Consideramos, para cada  $x \in X$ , o subgrupo

$$K_x = \langle h_1, \dots, h_r, x \mid h_j \in H, j = 1, \dots, r \rangle.$$

Pelo Corolário 2.3.3, o subgrupo  $J$  o qual é gerado pelos conjugados de  $K_x$  por  $\langle x \rangle$ , ou seja,

$$J = \langle h_j \mid j = 1, \dots, r \rangle^{\langle x \rangle}$$

é finitamente gerado e, portanto, solúvel. Como  $J$  é um subgrupo normal de  $K_x$ , temos  $K_x$  solúvel. Em particular,  $\langle H, x \rangle$  é localmente solúvel. Assim, pelo Corolário 2.2.6,  $x \in HP(\langle H, x \rangle)$ . Logo,  $[H, x]$  é localmente nilpotente.  $\square$

*Demonstração da Proposição 2.3.7.* Sabemos que

$$G^{(k+1)} = [G^{(k)}, G^{(k)}] \leq [G^{(k)}, G].$$

Pelo lema anterior, temos que  $[G^{(k)}, G]$  é localmente nilpotente. Em particular,  $G^{(k+1)}$  é localmente nilpotente. Pelo Teorema 2.2.5,  $G/G^{(k+1)}$  é localmente nilpotente, pois o radical de Hirsch-Plotkin coincide com o conjunto dos elementos Engel em grupos solúveis. Logo, pelo Teorema 2.2.9,  $G$  é localmente nilpotente.  $\square$

**Observação 2.3.9.** *Mais geralmente, se  $G$  é um grupo no qual  $G^{(k)}$  é localmente solúvel, temos que  $\varepsilon(G) = HP(G)$ . E a demonstração é similar a prova da Proposição 2.3.7.*

## CAPÍTULO 3

---

### Subgrupos verbais de grupos residualmente finitos

---

Os resultados descritos nesse capítulo estão relacionadas à obtenção de critérios de nilpotência para subgrupos verbais de grupos residualmente finitos. Mais precisamente, obtemos condições suficientes para que certos elementos  $n$ -Engel estejam no radical de Hirsch-Plotkin.

Salvo menção em contrário, todos os resultados apresentados nesse capítulo foram obtidos em colaboração com P. Shumyatsky, A. Tortora e M. Tota e estão no artigo: [BSTT]. Algumas vezes, para simplificar a escrita, incluímos as iniciais **BSTT** ao nos referirmos ao artigo [BSTT].

### 3.1 Motivação e resultados principais

Usando resultados associados à solução positiva do Problema Restrito de Burnside, J. S. Wilson mostrou o seguinte Teorema sobre grupos  $n$ -Engel:

**Teorema** (Wilson, [W]) Sejam  $n$  um inteiro positivo e  $G$  um grupo residualmente finito. Se  $G$  é  $n$ -Engel, então  $G$  é localmente nilpotente.

Em seguida, P. Shumyatsky [S1] mostrou que tal resultado pode ser estendido da seguinte forma:



**Teorema** (Shumyatsky, [S1, S2]) Sejam  $k, n$  inteiros positivos e  $G$  um grupo residualmente finito. Se os comutadores  $[x_1, \dots, x_k]$  são  $n$ -Engel, para todos  $x_1, \dots, x_k \in G$ , então o  $k$ -ésimo termo da série central inferior  $\gamma_k(G)$  é localmente nilpotente.

Nesse capítulo, estudamos outros subgrupos verbais  $w(G)$  de grupos residualmente finitos  $G$ , nos quais impomos condição de Engel sobre os seus  $w$ -valores. Mais especificamente, estudamos a seguinte conjectura:

**Conjectura A.** Sejam  $w$  uma palavra de grupo e  $n$  um inteiro positivo. Se  $G$  é um grupo residualmente finito no qual todos os  $w$ -valores são  $n$ -Engel, então o subgrupo verbal  $w(G)$  é localmente nilpotente.

No nosso contexto, o resultado de P. Shumyatsky, em [S1, S2] nos dá solução positiva para tal questão quando  $w$  é a palavra  $\gamma_k$ , para cada inteiro positivo  $k$ . Aqui nosso objetivo é estender tal resultado da seguinte forma:

**Teorema A.** Sejam  $d, n$  inteiros positivos e  $w$  um comutador multilinear. Considere  $v = w^d$ . Se  $G$  é um grupo residualmente finito no qual todos os  $v$ -valores são  $n$ -Engel, então o subgrupo verbal  $v(G)$  é localmente nilpotente.

**Teorema B.** Sejam  $n$  um inteiro positivo e  $w$  um comutador multilinear. Se  $G$  é um grupo localmente graduado no qual todos os  $w$ -valores são  $n$ -Engel, então o subgrupo  $w(G)$  é localmente nilpotente.

**Teorema C.** Sejam  $n, m$  inteiros positivos. Se  $G$  é um grupo residualmente finito no qual  $x$  é  $n$ -Engel ou  $x^m$  é  $n$ -Engel, para todo  $x \in G$ , então o subgrupo  $G^m$  é localmente nilpotente.

O **Teorema C** não comparece em **BSTT** e, em princípio, não é um avanço direto para a **Conjectura A**. Por outro lado, tal resultado serve para demonstrar que tal questão é válida para outras classes de palavras, tais como as palavras do tipo não-comutador.

**Teorema D.** Sejam  $n$  um inteiro positivo e  $w$  uma palavra não-comutador. Se  $G$  é um grupo residualmente finito no qual todos os  $w$ -valores são  $n$ -Engel, então o subgrupo  $w(G)$  é localmente nilpotente.

## 3.2 Demonstrações dos resultados

Para organizar melhor o capítulo, dividimos as seções de acordo com o tipo de palavra estudado. Inicialmente vamos considerar comutadores multilineares e, depois, palavras do tipo não-comutador.

### 3.2.1 Comutador Multilinear

Antes de demonstrar o **Teorema A**, vamos considerar a seguinte proposição:

**Proposição 3.2.1.** *Sejam  $d, n$  inteiros positivos e  $w$  um comutador multilinear. Considere  $v = w^d$ . Suponha que  $G$  é um grupo residualmente finito gerado por um número finito de elementos Engel. Se todos os  $v$ -valores são  $n$ -Engelianos, então  $G$  é nilpotente.*

*Demonstração.* Usando o Teorema 2.2.3, obtemos que todos os quocientes finitos de  $G$  são nilpotentes, pois são grupos finitos gerados por elementos Engelianos. Assim,  $G$  é residualmente (nilpotente finito). Pelo Lema 1.2.5, podemos supor que  $G$  é residualmente- $p$ , para algum primo  $p$ . Por outro lado, pelo Lema 1.1.12, existe um inteiro  $k$  de tal sorte que todos os  $\delta_k$ -valores são, em particular,  $w$ -valores em  $G$ . Agora, a demonstração segue em duas partes:

**Parte I.** Inicialmente mostramos que  $G^{(k)}$  é localmente solúvel. Tomemos uma quantidade finita e arbitrária de  $\delta_k$ -valores  $h_1, \dots, h_r$  e consideramos o subgrupo

$$H = \langle h_1, \dots, h_r \rangle.$$

Agora, devemos mostrar que  $H$  é solúvel. Consideramos a álgebra de Lie associada a série Zassenhaus-Jennings-Lazard

$$H = D_1 \geq D_2 \geq \dots$$

de  $H$ . Então,  $L = L_p(H)$  é gerado por  $\tilde{h}_i = h_i D_2$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ . Dado  $\tilde{h}$  um comutador de Lie em  $\tilde{h}_i$  e  $h$  o comutador de grupo em  $h_1, \dots, h_r$  associado a  $\tilde{h}$  tendo o mesmo sistema de colchetes que  $\tilde{h}$ . Pelo Lema 1.4.9, temos

$$(ad \tilde{h})^d = ad(\tilde{h}^d).$$

Desde que  $h^d$  é  $n$ -Engel, segue que  $\tilde{h}$  é ad-nilpotente. Em particular, a ad-nilpotência de  $\tilde{h}$  tem índice no máximo  $dn$ . Mais ainda,  $H$  satisfaz a identidade

$$f = [y, {}_n\delta_k^d(x_1, \dots, x_{2^k})] \equiv 1.$$

Do Lema 1.4.13, a álgebra de Lie  $L$  é PI. Portanto, pelo Teorema 1.4.5,  $L$  é nilpotente. Chamemos  $\hat{H}$  o completamento pro- $p$  de  $H$ . Temos que  $L_p(\hat{H}) = L$  (pois  $H$  e  $\hat{H}$  tem os mesmos quocientes finitos [RZ, Proposição 3.2.2]) é nilpotente e segue do Teorema 1.4.11 que  $\hat{H}$  é  $p$ -ádico analítico. Assim,  $H$  admite uma representação linear fiel sobre os números  $p$ -ádicos. Finalmente, observe que  $H$  satisfaz a identidade  $f \equiv 1$  e, conseqüentemente,  $H$  não possui um subgrupo isomorfo a um grupo livre não abeliano. Pelo Teorema 1.3.13,  $H$  possui um subgrupo solúvel de índice finito. Logo,  $H$  é solúvel (pois seus quocientes finitos são nilpotentes). Como isso, concluímos a demonstração da **Parte I**, pois a escolha dos  $\delta_k$ -valores foi arbitrária.

**Parte II.** Agora, chamemos  $M = v(G)$ . Note que  $M$  é um grupo gerado por elementos  $n$ -Engel. Pela **Parte I**,  $M^{(k)}$  é localmente solúvel. De acordo com a Proposição 2.3.7,  $M$  é localmente nilpotente. Isso conclui a demonstração.  $\square$

Agora, a parte técnica da demonstração do **Teorema A** foi feita e o restante da prova ficou bem simples, vejamos:

**Teorema A.** Sejam  $d, n$  inteiros positivos e  $w$  um comutador multilinear. Considere  $v = w^d$ . Se  $G$  é um grupo residualmente finito no qual todos os  $v$ -valores são  $n$ -Engel, então o subgrupo verbal correspondente  $v(G)$  é localmente nilpotente.

*Demonstração.* Seja  $X$  um subconjunto finito e arbitrário de  $v(G)$ . Assim, existem finitos  $v$ -valores  $v_1, \dots, v_s$  tais que

$$\langle X \rangle \leq \langle v_1, \dots, v_s \rangle.$$

Com isso, é suficiente mostrar que  $N = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$  é nilpotente. Agora, podemos aplicar a Proposição 3.2.1 ao subgrupo  $N$  e o resultado segue.  $\square$

Note que, de maneira indireta, obtemos a igualdade entre o conjunto dos elementos Engel e o radical de Hirsch-Plotkin quando  $G$  é um grupo residualmente finito satisfazendo uma identidade  $f \equiv 1$ , mais precisamente:

**Corolário 3.2.2.** *Sejam  $d, n$  inteiros positivos e  $w$  um comutador multilinear. Considere  $v = w^d$ . Se  $G$  é um grupo residualmente finito no qual todos os  $v$ -valores são  $n$ -Engel, então  $HP(G) = \varepsilon(G)$ .*

*Demonstração.* É suficiente mostrar que  $E = \langle \varepsilon(G) \rangle$  é localmente nilpotente. Pelo Lema 1.1.12, existe um inteiro  $k$  de tal sorte que todos os  $\delta_k$ -valores são, em particular,  $w$ -valores em  $G$ . Pelo mesmo argumento usado na Proposição 3.2.1, temos que  $G^{(k)}$  é localmente solúvel. Em particular,  $E^{(k)}$  é localmente solúvel. Finalmente, pela Proposição 2.3.7,  $E$  é localmente nilpotente.  $\square$

## Comutadores multilineares em grupos localmente graduados

Estudamos uma versão da **Conjectura A** para a classe dos grupos localmente graduados.

**Conjectura B.** Sejam  $w$  uma palavra de grupo e  $n$  um inteiro positivo. Se  $G$  é um grupo localmente graduado no qual todos os  $w$ -valores são  $n$ -Engel, então, o subgrupo verbal  $w(G)$  é localmente nilpotente.

Obtemos um resultado análogo ao **Teorema A**. Entretanto, o resultado é parcial e fica restrito aos comutadores multilineares.

**Teorema B.** Seja  $n$  um inteiro positivo e  $w$  um comutador multilinear. Se  $G$  é um grupo localmente graduado no qual todos os  $w$ -valores são  $n$ -Engel, então o subgrupo verbal  $w(G)$  é localmente nilpotente.

*Demonstração.* Pelo Lema 1.1.12, existe um inteiro positivo  $k$  tal que todos os  $\delta_k$ -valores em  $G$  são ainda  $w$ -valores em  $G$ . Denotamos por  $X$  o conjunto de todos os  $\delta_k$ -valores em  $G$ . Tomamos uma quantidade arbitrária e finita de  $\delta_k$ -valores  $h_1, \dots, h_d$  e considere

$$H = \langle h_1, \dots, h_d \rangle.$$

Mostraremos que  $H$  é nilpotente.

**Afirmação:** É suficiente mostrar que  $H$  é residualmente finito.

Caso  $H$  seja residualmente finito, podemos usar a Proposição 3.2.1 diretamente. Com isso, consideramos  $R$  a interseção de todos os subgrupos de índice finito em  $H$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que,  $R \neq 1$  (senão  $H$  já seria residualmente finito). O quociente  $H/R$  é residualmente finito e, pela Proposição 3.2.1, é nilpotente. Daí, existe um inteiro positivo  $s$  tal que

$$H^{(s)} \leq R.$$

Note que  $H/H^{(s+1)}$  é nilpotente, visto que é um grupo solúvel o qual é gerado por uma quantidade finita de elementos Engel (Teorema 2.2.5). Assim,  $H/H^{(s+1)}$  é também residualmente finito [R2, 5.4.18]. Daí,

$$H^{(s)} = H^{(s+1)}.$$

Por outro lado,  $X \cap H$  é um conjunto  $c$ -fechado de  $H$  e, consequentemente, pelo Corolário 2.3.6,  $H^{(s)}$  é finitamente gerado. Temos que  $R/H^{(s)}$  é um subgrupo finitamente gerado, pois é um subgrupo de um grupo nilpotente finitamente gerado. Portanto,  $R$  é finitamente gerado. Digamos,  $R$  tem  $r$  geradores. Como  $G$  é um grupo localmente graduado e  $R$  é finitamente gerado, temos que  $R$  possui um subgrupo próprio  $N_1$  de índice finito. Chamamos  $t = |R : N_1| < \infty$ . Agora, tomamos  $N$  como sendo a interseção de todos os subgrupos de  $R$  cujo índice é, exatamente,  $t$ . Por [H, Teorema 7.2.9], temos que o número de subgrupos de índice  $t$  em  $R$  é limitado por uma função que depende somente de  $t$  e  $r$ . Assim,

$$|R : N| < \infty.$$

Temos que  $N$  é um subgrupo característico de  $R$  e, portanto,  $N \triangleleft H$ . Com isso,  $H/R$  é políciclico e  $R/N$  é finito, temos que  $H/N$  satisfaz a condição maximal [R2, 5.4.12]. Pelo Teorema 2.2.3,  $H/N$  é nilpotente. Logo,  $H^{(s+1)}$  é um subgrupo normal próprio de  $H^{(s)}$ . Absurdo. Com isso, temos que  $R = 1$  e, consequentemente,  $H$  é residualmente finito.  $\square$

**Observação 3.2.3.** *Recentemente, P. Shumyatsky, A. Tortora e M. Tota demonstraram que o Teorema A admite uma generalização para grupos localmente graduados, veja [STT].*

### 3.2.2 Palavra não-comutador

Os resultados a seguir estão diretamente relacionados a potências de elementos de grupos residualmente finitos.

**Teorema C.** Sejam  $k, n$  inteiros positivos. Se  $G$  é um grupo residualmente finito no qual  $x$  é  $n$ -Engel ou  $x^d$  é  $n$ -Engel, para todo  $x \in G$ , então  $G^k$  é localmente nilpotente.

*Demonstração.* Inicialmente, mostramos que  $x^d$  é um elemento do radical de Hirsch-Plotkin de  $G$ , independente da escolha do  $x \in G$ . Seja  $x \in G$ . Temos duas possibilidades a serem consideradas:

**Caso 1:**  $x$  é  $n$ -Engel.

Tome  $A = \langle x^G \rangle = \langle x^g \mid g \in G \rangle$ . É suficiente mostrar que  $A$  é localmente nilpotente (e, em particular, obteremos  $x$  e  $x^d \in HP(G)$ ). Escolha arbitrariamente um conjunto finito de elementos em  $G$ , digamos  $X = \{g_1, \dots, g_s\}$ . Chame  $H = \langle h_1, \dots, h_s \rangle$ , onde  $h_i = x^{g_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ . Note que, cada  $h_i$  é ainda  $n$ -Engel, pois é conjugado a  $x$ .

Pelo Teorema 2.2.3, segue que em grupos finitos o subgrupo de Fitting coincide com o conjunto dos elementos Engelianos. Dessa forma,  $G$  é residualmente-(nilpotente finito). Pelo Lema 1.2.5,  $H$  pode ser considerado residualmente- $p$ , para algum primo  $p$ . Consideramos a álgebra de Lie associada a série Zassenhaus-Jennings-Lazard:

$$H = D_1 \geq D_2 \geq \dots$$

Então, a álgebra de Lie  $L = L_p(H)$  é gerada por  $\tilde{h}_i = h_i D_2$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ . Note que  $G$  satisfaz a identidade  $f \equiv 1$ :

$$f = [y, \underbrace{z, \dots, z}_{n \text{ vezes}}, \underbrace{z^d, \dots, z^d}_{n \text{ vezes}}] \equiv 1.$$

Assim,  $L$  satisfaz uma identidade polinomial não trivial, pois  $H$  satisfaz também a identidade  $f \equiv 1$  (Corolário 1.4.8). Dado  $\tilde{h}$  um comutador de Lie em  $\tilde{h}_i$  e  $h$  o comutador de grupo em  $h_1, \dots, h_s$  associado a  $\tilde{h}$  tendo o mesmo sistema de colchetes que  $\tilde{h}$ . Pelo Lema 1.4.9, temos

$$(ad \tilde{h})^d = ad(\tilde{h}^d).$$

Desde que  $h^d$  é  $n$ -Engel, segue que  $\tilde{h}$  é ad-nilpotente. Em particular, a ad-nilpotência de  $\tilde{h}$  tem índice no máximo  $dn$ . Considere  $\hat{H}$  o completamente pro- $p$  de  $H$ . Desde que  $H$  e  $\hat{H}$  tem os mesmos quocientes finitos,  $L = L_p(\hat{H})$ . Segue do Teorema 1.4.5,  $L$  é nilpotente. Com isso,  $\hat{H}$  é um grupo pro- $p$  e a álgebra  $L$  é nilpotente. Pelo Teorema 1.4.11,  $H$  possui uma representação linear fiel sobre os números  $p$ -ádicos. Por outro lado,  $H$  satisfaz a lei  $f \equiv 1$  e, conseqüentemente, não pode conter um subgrupo isomorfo a um grupo livre não abeliano. Pelo Teorema 1.3.13,  $H$  possui um subgrupo solúvel de índice finito. Como os quocientes finitos de  $H$  são nilpotentes, segue que  $H$  é solúvel. Pelo Teorema 2.2.5, obtemos que  $H$  é nilpotente. Em particular, os elementos  $x$  e  $x^d$  pertencem ao subgrupo  $HP(G)$ .

**Caso 2:** Se  $x$  não é  $n$ -Engel, então  $x^d$  é  $n$ -Engel.

Nesse caso podemos proceder da mesma forma que no **Caso 1**, fazendo  $B = \langle (x^d)^G \rangle$ . Portanto,  $x^d \in HP(G)$ , para todo  $x \in G$ . Logo,  $G^d \subseteq HP(G)$ .  $\square$

**Corolário 3.2.4.** *Sejam  $m, n$  inteiros positivos e  $G$  um grupo residualmente finito. Se  $x^d$  é  $n$ -Engel, para todo  $x \in G$ , então  $G^d$  é localmente nilpotente.*

**Observação 3.2.5.** *O Corolário acima é consequência imediata do Teorema C. E, em particular, temos solução positiva para a Conjectura A quando a palavra é a  $k$ -ésima potência. Ou seja,  $w = x_1^k$ .*

**Teorema D.** Sejam  $n$  inteiro positivo e  $w$  uma palavra não-comutador. Se  $G$  é um grupo residualmente finito no qual todos os  $w$ -valores são  $n$ -Engel, então o subgrupo verbal  $w(G)$  é localmente nilpotente.

*Demonstração.* Seja  $w = w(x_1, \dots, x_r)$  uma palavra não-comutador. Portanto existe uma variável  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  tal que a soma dos expoentes da variável  $x_i$  que comparecem na palavra  $w$  é diferente de 0. Sem perda de generalidade, podemos supor que seja a variável  $x_1$  (a menos de uma reordenação dos índices, se necessário) e chamemos tal soma de  $d \neq 0$ .

$$w(g, \underbrace{1, \dots, 1}_{(r-1) \text{ vezes}}) = \Phi_w(g, \underbrace{1, \dots, 1}_{(r-1) \text{ vezes}}) = g^d.$$

Com isso, temos que  $g^d$  é um  $w$ -valor, para cada  $g \in G$ . Ou seja, todas as  $d$ -ésimas potências são  $n$ -Engel em  $G$ . Em particular,  $G^d \subseteq w(G)$ .

Pelo Corolário 3.2.4, temos que  $G^d$  é localmente nilpotente. Agora, tomamos um subconjunto finito e arbitrário em  $w(G)$ , digamos  $X = \{g_1, \dots, g_t\}$ . Chamamos  $H = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$ . É suficiente mostrar que  $H$  é nilpotente. Sabemos que  $H^d$  é localmente nilpotente. Segue do Lema 1.2.10,  $H/H^d$  é localmente graduado. Por outro lado, pelo Lema A.3.1, segue que  $H/H^d$  é finito, pois é um grupo localmente graduado finitamente gerado de expoente finito. Mais ainda, podemos garantir que  $H^d$  é finitamente gerado, pois é um subgrupo de índice finito de um grupo finitamente gerado [R2, 1.6.11]. Portanto,  $H^d$  é nilpotente. De acordo com o Teorema 2.2.3,  $H/H^d$  é nilpotente, pois é finito e gerado por elementos Engel e, conseqüentemente,  $H$  é solúvel. Pelo Teorema 2.2.5,  $H$  é nilpotente.  $\square$

**Observação 3.2.6.** *Por um resultado de B. H. Neumann [N, Teorema 12.12], toda palavra  $w$  pode ser escrita como o produto  $w_1 w_2$ , onde*

$$w_1 = x_1^{m_1} \dots x_r^{m_r}$$

*e  $w_2$  é uma palavra do tipo comutator. Assim, a partir do Teorema D concluímos que a demonstração da Conjectura A (caso ela seja verdadeira) depende da obtenção de solução positiva para todas as palavras do tipo comutador. Adicionalmente, pelo Teorema A, podemos restringir o estudo as palavras do tipo comutador que não sejam comutadores multilineares ou potências de comutadores multilineares.*

## Potências em grupos localmente graduados

Aqui apresentamos algumas aplicações para grupos localmente graduados. Em particular, demonstramos um resultado análogo ao Teorema D na classe dos grupos localmente graduados. Ou seja, obtemos que a Conjectura B é válida para as palavras do tipo não-comutador.

**Teorema 3.2.7.** *Sejam  $n$  um inteiro positivo e  $w$  uma palavra não-comutador. Se  $G$  é um grupo localmente graduado no qual todos os  $w$ -valores são  $n$ -Engel, então o subgrupo verbal  $w(G)$  é localmente nilpotente.*

*Demonstração.* Seja  $w = w(x_1, \dots, x_r)$  uma palavra não-comutador. Portanto existe uma variável  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  tal que a soma dos expoentes da variável  $x_i$  que comparecem na palavra  $w$  é diferente de 0. Sem perda de generalidade, podemos supor que seja a variável  $x_1$  (a menos de uma reordenação dos índices, se necessário) e chamemos tal soma de  $d \neq 0$ . Faça a



substituição de 1 por cada variável  $x_2, \dots, x_r$  e substitua um elemento arbitrário  $g \in G$  por  $x_1$ . Isto, temos que  $g^d$  é um  $w$ -valor, para cada  $g \in G$ . A demonstração segue em dois passos:

**Passo 1:**  $G^d$  é localmente nilpotente.

Tomemos uma quantidade arbitrária e finita de elementos de  $G$ , digamos  $g_1, \dots, g_m$  e considere o subgrupo  $H = \langle g_1^d, \dots, g_m^d \rangle$ . É suficiente mostrar que  $H$  é residualmente finito e o resultado segue da Proposição 3.2.1. Seja  $R$  a interseção de todos os subgrupos de índice finito de  $H$ . Suponhamos que  $R \neq 1$ . Assim, o grupo quociente  $H/R$  é residualmente finito e, pela Proposição 3.2.1, segue que  $H/R$  é nilpotente. Daí, existe um inteiro positivo  $s$  tal que  $H^{(s)} \leq R$ . Mais ainda, temos que  $H^{(s)}$  é finitamente gerado (Corolário 2.3.6). E podemos proceder da mesma forma que na demonstração do **Teorema B**, o que nos leva a uma contradição. Portanto,  $H$  é residualmente finito.

**Passo 2:**  $w(G)/G^d$  é localmente nilpotente.

Como  $G^d$  é localmente nilpotente, segue que  $\overline{W} = w(G)/G^d$  é localmente graduado (Lema 1.2.10). Por outro lado, pelo Lema A.3.1,  $\overline{W}$  é localmente finito e, consequentemente,  $\overline{W}$  é localmente nilpotente (Corolário 2.2.4). Como  $G^d$  e  $\overline{W}$  são localmente nilpotentes, pelo Teorema 2.2.9, temos que  $w(G) \subseteq HP(G)$ .  $\square$

Agora, obtemos alguns corolários para grupos localmente graduados nos quais certas potências são  $n$ -Engel.

**Corolário 3.2.8.** *Sejam  $m, n$  inteiros positivos. Se  $G$  é um grupo localmente graduado no qual  $x$  é  $n$ -Engel ou  $x^d$  é  $n$ -Engel, para todo  $x$  em  $G$ , então  $HP(G) = \varepsilon(G)$ .*

*Demonstração.* Denotamos por  $E = \langle \varepsilon(G) \rangle$ . É suficiente mostrar que  $E$  é localmente nilpotente. Do Teorema 3.2.7,  $E^d$  é localmente nilpotente. Pelo Lema 1.2.10, segue que  $\overline{E} = E/E^d$  é localmente graduado (e de expoente  $m$ ). Temos ainda que  $\overline{E}$  é localmente finito, pois é um grupo localmente graduado de expoente finito (Lema A.3.1). Mais ainda, pelo Corolário 2.2.4,  $\overline{E}$  é localmente nilpotente. De acordo com o Teorema 2.2.9,  $E \subseteq HP(G)$ .  $\square$

A partir do Teorema 3.2.7, obtemos um critério de solubilidade para grupos localmente graduados (finitamente gerados) nos quais certas potências fixadas de  $G$  são elementos  $n$ -Engel, mais precisamente:

**Corolário 3.2.9.** *Sejam  $n$  inteiro positivo e  $q$  uma potência de um primo  $p$ . Se  $G$  é um grupo localmente graduado finitamente gerado no qual  $x^q$  é  $n$ -Engel, para todo  $x \in G$ , então  $G$  é solúvel.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.2.7, temos que  $G^q$  é localmente nilpotente. Com isso, segue do Lema 1.2.10,  $G/G^q$  é localmente graduado. Temos ainda, pelo Lema A.3.1,  $G/G^q$  é um  $p$ -grupo finito. Como  $G^q$  é um subgrupo de índice finito de um grupo finitamente gerado, temos que  $G^q$  é finitamente gerado [R2, 1.6.11]. Portanto,  $G^q$  e  $G/G^q$  são nilpotentes e, conseqüentemente,  $G$  é solúvel.  $\square$

**Observação 3.2.10.**

- *Observe que o Corolário 3.2.9, em certo sentido, não pode ser melhorado. Mais precisamente, não podemos concluir que  $G$  é nilpotente. Por exemplo, considere o diedral infinito  $D_\infty$  cuja apresentação de grupo é a seguinte:*

$$D_\infty = \langle x, y \mid y^2 = 1 \text{ e } x^y = x^{-1} \rangle.$$

*Temos que  $g^2$  é 2-Engel, para todo  $g \in D_\infty$  e  $D_\infty$  não é nilpotente. Na verdade, a mesma análise pode ser feita para qualquer diedral não nilpotente*

$$D_n = \langle x, y \mid x^n = 1 = y^2 \text{ e } x^y = x^{-1} \rangle,$$

*onde  $n$  não é uma potência de 2;*

- *Em particular, no Corolário 3.2.9 temos que a altura de Fitting de  $h(G)$  é menor ou igual a dois.*
- *A suposição do grupo ser localmente graduado no Corolário 3.2.9 é importante e, a priori, não pode ser retirada sem incluir uma outra restrição. Por exemplo: dados  $n$  um inteiro positivo e  $p$  um primo ( $p > 10^{75}$ ). Existe um grupo  $G$  de expoente  $p$ , o qual satisfaz a identidade  $f \equiv 1$ :*

$$f = [x, {}_n y^p] \equiv 1$$

*que não é solúvel. Adicionalmente: tal grupo é 2-gerado, qualquer subgrupo próprio (não trivial) tem ordem  $p$  e  $G = G'$ . Esses grupos foram criados por A. Ol'shankii e são conhecidos como monstros de Tarski. Para outros exemplos e referências bibliográficas, veja [GN].*

## Considerações finais do Capítulo

- Considerando as hipóteses da **Conjectura A**. Cabe observar algumas situações que fornecem resposta positiva para tal problema:
  - i) (Corolário 2.2.6) Se  $w(G)$  é localmente solúvel, então  $G_w \subseteq HP(w(G))$ . Em particular,  $w(G)$  é localmente nilpotente.
  - ii) (Teorema 2.2.9) Se  $w(G)$  é radicável, então  $G_w \subseteq HP(w(G))$ . Em particular,  $w(G)$  é localmente nilpotente.
  - iii) (Proposição 2.3.7) Seja  $k$  um inteiro positivo. Se  $G^{(k)}$  é localmente solúvel, então  $G_w \subseteq HP(w(G))$ . Em particular,  $w(G)$  é localmente nilpotente.
- Note que os seguintes fatos sempre foram imprescindíveis nas demonstrações:
  - i)  $G$  satisfaz alguma identidade de grupo  $f \equiv 1$ ;
  - ii) todos os  $w$ -valores são  $n$ -Engel, para alguma palavra de grupo  $w$ .

Na maioria dos nossos resultados, para garantir que um dado grupo satisfazia uma identidade estávamos usando implicitamente a suposição de que todos os  $w$ -valores eram  $n$ -Engel. Por exemplo: sejam  $w = w(x_1, \dots, x_s)$  uma palavra e  $G$  um grupo residualmente finito. Se todos os  $w$ -valores (em  $G$ ) são  $n$ -Engel, então  $G$  satisfaz a identidade  $f \equiv 1$ :

$$f = [y, {}_n w(x_1, \dots, x_s)] \equiv 1.$$

- A grosso modo, com poucas adaptações da demonstração da Proposição 3.2.1 podemos obter um Critério para decidir quando um certo elemento Engel (mais precisamente, um elemento de  $\bar{e}(G)$ ) pertence ao radical de Hirsch-Plotkin de  $G$ . Veja **Teorema G** no Capítulo 5.
- Recentemente, P. Shumyatsky, A. Tortora e M. Tota demonstraram resultados análogos aos **Teorema A** e **Teorema C** para grupos ordenáveis. Para maiores detalhes, veja [STT2].
- No próximo capítulo iremos investigar problemas análogos a **Conjectura A**, mas para subgrupos verbais de grupos profinitos finitamente gerados. Entretanto, nesse outro contexto, vamos exigir que os  $w$ -valores

---

sejam Engel. Mais ainda, para os grupos em questão, em princípio, não vamos dispor que eles satisfazem identidades, mas apenas identidades de classe (maiores detalhes, veja a Definição 1.4.12 e o Teorema 1.4.13).

## CAPÍTULO 4

---

### Subgrupos verbais de grupos profinitos

---

Nesse capítulo estudamos critérios de nilpotência (ou “quase nilpotência”) para subgrupos verbais de grupos profinitos finitamente gerados.

#### 4.1 Motivação e resultados principais

Ao longo desse capítulo adotamos as seguintes convenções. Seja  $G$  um grupo profinito. Salvo menção em contrário, quando dizemos que  $H$  é um subgrupo de  $G$ , estamos assumindo que  $H$  é um subgrupo fechado de  $G$ . Ou seja, todos os subgrupos são pensados “topologicamente” e adotamos a notação  $H \leq G$  no lugar de  $H \leq_c G$ . Dado uma palavra  $w$ . O subgrupo verbal  $w(G)$  denota o fecho do grupo abstrato  $\langle G_w \rangle$ .

Os nossos resultados sobre subgrupos verbais em grupos profinitos finitamente gerados foram motivados, especialmente, pelos seguintes resultados:

**Teorema** (Wilson e Zelmanov, [WZ, Teorema 5] ) Seja  $G$  um grupo profinito finitamente gerado. Se  $G$  é Engel, então  $G$  é nilpotente.

**Teorema** (Shumyatsky, [S5, Teorema 1.1] ) Sejam  $k$  um inteiro positivo e  $G$  um grupo profinito finitamente gerado. Se  $[x_1, \dots, x_k]$  é Engel, para todos

$x_1, \dots, x_k \in G$ , então  $\gamma_k(G)$  é localmente nilpotente.

**Lema 4.1.1.** *(Nikolov e Segal, [NS2, Corolário 1]) Seja  $k$  um inteiro positivo. Se  $G$  é um grupo profinito finitamente gerado, então  $G^k$  é um subgrupo aberto de  $G$ .*

Recentemente, A. Jaikin-Zapirain demonstrou o seguinte resultado sobre subgrupos verbais de grupos pro- $p$  finitamente gerados.

**Teorema** (Jaikin-Zapirain, [J-Z, Teorema 1.1]) *Seja  $w = w(x_1, \dots, x_s)$  uma palavra de grupo. Chamemos  $G = F(x_1, \dots, x_s)$ . Então são equivalentes*

- (a)  $w(P) \subseteq_c P$  (gerado como grupo abstrato), para qualquer grupo pro- $p$  finitamente gerado  $P$ ;
- (b)  $w \notin (G')^p G''$ .

Nesse contexto obtemos os seguintes resultados:

**Teorema E.** *Sejam  $k, d$  inteiros positivos e  $G$  um grupo pronilpotente finitamente gerado. Se  $[x_1, \dots, x_k]^d$  é Engel, para todos  $x_1, \dots, x_k \in G$ , então  $\gamma_k(G)$  é localmente (nilpotente-por-finito).*

No teorema acima consideramos apenas grupos pronilpotentes finitamente gerados e não pudemos assegurar que  $\gamma_k^d(G)$  é localmente nilpotente. Chamamos  $K = \gamma_k^d(G)$ . Assim,  $K \subseteq \gamma_k(G)$ . Temos que o  $k$ -ésimo termo da série central inferior  $\gamma_k(G)$  é localmente (nilpotente-por-finito). Até agora, não sabemos se é possível estender tal resultado para grupos profinitos finitamente gerados quaisquer.

**Teorema F.** *Sejam  $w$  uma palavra não-comutador e  $G$  um grupo profinito finitamente gerado. Se todos os  $w$ -valores são Engel, então o subgrupo verbal correspondente  $w(G)$  é nilpotente.*

## 4.2 Demonstrações dos resultados

As terminologias e notações empregadas nesse capítulo podem ser encontradas em J. Dixon, et al [DDMS] ou L. Ribes e P. Zalesskii [RZ].

## Potências de Comutadores

Denotamos por  $\mathcal{N}^h$  a classe de todos os grupos solúveis finitos  $G$  cuja altura de Fitting  $h(G)$  é, no máximo,  $h$ .

**Lema 4.2.1.** *Sejam  $k, h$  inteiros positivos e  $G$  um grupo pro- $\mathcal{N}^h$  finitamente gerado. Então qualquer elemento da série central inferior  $\gamma_k(G)$  pode ser escrito como o produto de uma quantidade finita de comutadores (de peso  $k$ ).*

Para uma demonstração desse fato veja [S5, Corolário 3.3]. Inicialmente, o resultado acima foi feito para comutadores simples por B. Hartley. Em [S5], P. Shumyatsky estendeu tal resultado para comutadores de tamanho maior. Recentemente, N. Nikolov e D. Segal [NS2] mostraram que se  $G$  é um grupo profinito finitamente gerado, então todo elemento de  $\gamma_k(G)$  pode ser escrito como o produto de um número finito de comutadores de peso  $k$ .

**Lema 4.2.2.** *(Shumyatsky, [S5]) Sejam  $k$  um inteiro positivo e  $G$  um grupo profinito finitamente gerado. Suponha que  $G$  é solúvel e gerado por uma quantidade finita de elementos de ordem finita. Se  $[x_1, \dots, x_k]$  tem ordem finita, para todos  $x_1, \dots, x_k \in G$ , então  $G$  é finito.*

Para uma demonstração desse fato, veja [S5, Lema 4.8].

**Notação 4.2.3.** *Sejam  $d$  e  $k$  inteiros positivos. Denotamos a palavra  $\gamma_k^d$  como sendo*

$$\gamma_k^d(z_1, \dots, z_k) := \underbrace{[z_1, \dots, z_k] \dots [z_1, \dots, z_k]}_{d \text{ vezes}}.$$

O seguinte resultado é um Corolário do Teorema 1.4.13.

**Lema 4.2.4.** *Sejam  $d, k$  inteiros positivos e  $p$  um primo. Se  $G$  é um grupo profinito no qual todos os comutadores  $[x_1, \dots, x_k]^d$  são Engel, para todos  $x_1, \dots, x_k \in G$ , então a álgebra de Lie  $L_p(G)$  é PI.*

*Demonstração.* Denotamos por  $\tilde{G} = \underbrace{G \times \dots \times G}_{(k+1) \text{ vezes}}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  consideramos o seguinte subconjunto em  $\tilde{G}$ :

$$X_n = \{(b, a_1, \dots, a_k) \in \tilde{G} \mid [b, a_1, \dots, a_k]^d = 1\}.$$

Note que cada  $X_n$  é um subconjunto fechado de  $\tilde{G}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Por outro lado,  $[x_1, \dots, x_k]^d$  é Engel, para quaisquer  $x_1, \dots, x_k \in G$ . Logo, o grupo  $\tilde{G}$  é uma união enumerável dos subconjuntos fechados. Mais precisamente,

$$\tilde{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Pelo Teorema da Categoria de Baire (veja [K, página 200]), existe um inteiro positivo  $n$  tal que  $X_n$  possui interior não vazio. Em particular, existe um subconjunto  $K \subseteq_o G$  e  $K \subseteq X_n$ . Com isso, podemos obter elementos  $b, a_1, \dots, a_k \in G$  e um subgrupo  $H \leq_o G$  de modo que as classes laterais  $bH, a_1H, \dots, a_kH$  satisfazem a identidade de classes  $v \equiv 1$  que tem a forma:

$$v = [y_n [x_1, \dots, x_k]^d] \equiv 1.$$

Pelo Teorema 1.4.13, temos que  $L_p(G)$  é PI. □

**Lema 4.2.5.** *Sejam  $k, d$  inteiros positivos e  $G$  um grupo pro- $p$  finitamente gerado. Se  $[x_1, \dots, x_k]^d$  é Engel, para todos  $x_1, \dots, x_k \in G$ , então  $\gamma_k(G)$  é localmente solúvel.*

*Demonstração.* Dado  $X$  um conjunto finito e arbitrário de  $\gamma_k$ -valores de  $G$ , digamos  $X = \{a_1, \dots, a_t\}$ . Chamamos  $H = \langle a_1, \dots, a_t \rangle$ . Mostramos que o subgrupo  $H$  é solúvel. Consideramos a álgebra de Lie associada a série ZJL

$$H = D_1 \geq D_2 \geq \dots$$

de  $H$ . Então  $L = L_p(H)$  é gerada por  $\tilde{a}_i = a_i D_2$ ,  $i = 1, 2, \dots, t$ . Note que, dado  $\tilde{h}$  um comutador em  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_t$ , podemos associá-lo a um comutador de grupo  $h$  nos elementos  $a_1, \dots, a_t$  para algum sistema de colchetes. Ou seja, podemos obter elementos  $x_1, \dots, x_k \in H$  de modo que

$$h = [x_1, \dots, x_k].$$

Por hipótese,  $h^d = [x_1, \dots, x_k]^d$  é Engel e, pelo Lema 1.4.8,  $\tilde{h}^d$  é ad-nilpotente. Por outro lado, o Lema 1.4.9 nos dá uma relação entre a ad-nilpotência de um elemento com a ad-nilpotência de uma dada potência, mais precisamente:

$$(ad \tilde{h})^d = ad(\tilde{h}^d),$$

por isso,  $\tilde{h}$  é ad-nilpotente. Temos ainda  $L = L_p(H)$  é PI (Lema 4.2.4). Com isso, podemos usar o Teorema 1.4.5 e garantir que  $L$  é nilpotente. De acordo



com o Teorema 1.4.11,  $H$  é  $p$ -ádico analítico. Portanto,  $H$  tem posto finito e, por conseguinte,  $H$  não pode ter um subgrupo isomorfo a um grupo livre não abeliano. Em decorrência da Alternativa de Tits,  $H$  tem um subgrupo solúvel de índice finito. Como todos os quocientes finitos de  $H$  são nilpotentes, segue que  $H$  é solúvel.  $\square$

**Proposição 4.2.6.** *Sejam  $k, d$  inteiros positivos e  $G$  um grupo pro- $p$  finitamente gerado. Se  $[x_1, \dots, x_k]^d$  é Engel, para todos  $x_1, \dots, x_k \in G$ , então  $\gamma_k(G)$  é localmente (nilpotente-por-finito).*

*Demonstração.* Denotamos por  $X$  o conjunto de todos os  $\gamma_k$ -valores de  $G$ . Agora, consideramos uma quantidade finita e arbitrária de elementos de  $X$ , digamos  $h_1, \dots, h_s$  e  $H = \langle h_1, \dots, h_s \rangle$ . Pelo Lema 4.2.5,  $H$  é solúvel. Consideremos  $X_0$  o conjunto de todos os  $\gamma_k^d$ -valores contidos em  $H$  e  $K = \langle X_0 \rangle$ . A demonstração segue em duas partes:

**Parte 1.** Mostramos que o grupo quociente  $H/K$  é finito. Como todos os comutadores da forma  $[x_1, \dots, x_k]$  tem ordens dividindo  $d$ , em decorrência do Lema 4.2.2,  $H/K$  é finito.

**Parte 2.** Mostramos que  $K$  é nilpotente. Temos que  $K$  é um conjunto de índice finito em  $H$ . Portanto,  $K$  é finitamente gerado. Chamemos  $d(K) = m$ . Pela Proposição 1.3.7, podemos escolher exatamente  $m$  elementos  $x_1, \dots, x_m \in X_0$  de modo que

$$K = \langle x_1, \dots, x_m \rangle.$$

Como  $K$  está contido em  $\gamma_k(G)$ , já temos que  $K$  é solúvel. Escolhamos um subgrupo abstrato  $A$  gerado por elementos Engel e que seja um subgrupo denso em  $K$ . Pelo Teorema 2.2.5,  $A$  é nilpotente e, conseqüentemente,  $K$  é nilpotente.  $\square$

Agora, podemos demonstrar o **Teorema E**.

**Teorema E.** *Sejam  $k, d$  inteiros positivos e  $G$  um grupo pronilpotente finitamente gerado. Se  $[x_1, \dots, x_k]^d$  é Engel, para todos  $x_1, \dots, x_k \in G$ , então  $\gamma_k(G)$  é localmente (nilpotente-por-finito).*

*Demonstração.* Como  $G$  é um grupo pronilpotente, temos que

$$G = \prod_p G_p,$$

onde  $G_p$  é o  $p$ -subgrupo de Sylow de  $G$ . Seja  $p$  um primo. Se  $\text{mdc}(p, d) = 1$ , então todos os elementos de  $\gamma_k^d$ -valores são Engel e, pelo Lema 1.3.6, temos que o conjunto  $\{[x_1, \dots, x_k]^d \mid x_i \in G_p\}$  coincide com o conjunto  $\{[x_1, \dots, x_k] \mid x_i \in G_p\}$ . Assim, por [S5, Teorema 1.1],  $\gamma_k(G_p)$  é localmente nilpotente. Daí, o subgrupo

$$\prod_{p \notin A} \gamma_k(G_p)$$

é um grupo localmente nilpotente, sendo que  $A = \{p_1, \dots, p_r\}$  é o conjunto de todos os primos que aparecem na fatoração de  $d$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$\gamma_k(G) = \prod_{p \in A} \gamma_k(G_p).$$

Por outro lado, pela Proposição 4.2.6 obtemos que  $\gamma_k(G_p)$  é localmente nilpotente, para cada  $p \in A$ . Com isso, concluímos que  $\gamma_k(G)$  é, necessariamente, localmente (nilpotente-por-finito).  $\square$

## Palavra não-comutador

**Notação 4.2.7.** *Sejam  $G$  um grupo e  $k$  um inteiro positivo. Um  $p$ -subgrupo de Sylow do subgrupo  $G^k$  será denotado por  $(G^k)_p$ .*

Para simplificar a demonstração do **Teorema F**, mostramos o seguinte resultado auxiliar:

**Proposição 4.2.8.** *Sejam  $k$  um inteiro positivo e  $G$  um grupo pronilpotente finitamente gerado. Se  $x^k$  é Engel, para todo  $x \in G$ , então o subgrupo  $G^k$  é nilpotente.*

*Demonstração.* Como  $G$  é um grupo pronilpotente, temos que

$$G = \prod_p G_p,$$

onde os  $G_p$  são os  $p$ -subgrupos de Sylow de  $G$ . Seja  $p$  um primo. Se  $\text{mdc}(p, k) = 1$ , então todos os elementos de  $G_p$  são Engel e, pelo Teorema [WZ, Teorema 5.],  $G_p$  é nilpotente. Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$G = \prod_{p \in A} G_p,$$

sendo que  $A = \{p_1, \dots, p_r\}$  é o conjunto de todos os primos que aparecem na fatoração de  $k$ . Em particular,  $A$  é um conjunto finito. Mais ainda, como  $G$  é finitamente gerado, segue que cada  $p$ -subgrupo de Sylow é finitamente gerado. Mais ainda, pelo Lema 4.1.1,  $G^k \leq_o G$  e, conseqüentemente,  $G^k$  é também finitamente gerado. Dessa maneira, é suficiente mostrar que cada  $p_i$ -subgrupo de Sylow de  $G^k$  é nilpotente, para  $p_i \in A$ .

Dado um primo  $p_i \in A$ , consideramos  $H = (G^k)_{p_i}$ . Pela Proposição 4.2.5,  $H$  é solúvel e, por conseguinte,  $H^k$  é localmente nilpotente. Em particular, pelo Lema 4.1.1,  $H$  é finitamente gerado, pois  $H^k \leq_o H$ . Assim,  $H^k$  é nilpotente. A mesma análise pode ser feita para cada primo  $p$  e, conseqüentemente, obtemos que  $G^k$  é o produto de grupos (localmente) nilpotentes. Como  $G^k$  é finitamente gerado, segue que  $G^k$  é nilpotente.  $\square$

**Teorema 4.2.9.** *Seja  $k$  um inteiro positivo. Se  $G$  é um grupo profinito finitamente gerado no qual  $x^k$  é Engel, para todo  $x \in G$ , então  $G^k$  é nilpotente.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.2.3, todos os quocientes finitos de  $G^k$  são nilpotentes. Daí,  $G^k$  é um grupo pronilpotente. Em decorrência do Lema 4.1.1:  $G/G^k$  é finito e, em particular,  $G^k$  é finitamente gerado. Chamemos  $B = G^k$ . Aplicando a Proposição 4.2.8, temos que  $B^k$  é nilpotente. Novamente, temos que  $B^k \leq_o B$ . Portanto,  $\overline{B} = B/B^k$  é um grupo nilpotente, pois é um grupo finito gerado por elementos Engel (Teorema 2.2.3). Com isso,  $\overline{B}$  e  $B^k$  são nilpotentes. Assim,  $B$  é solúvel e pelo Teorema 2.2.5 obtemos que  $B$  é nilpotente.  $\square$

**Teorema F.** *Sejam  $w$  uma palavra não-comutador e  $G$  um grupo profinito finitamente gerado. Se todos os  $w$ -valores são Engelianos, então o subgrupo verbal correspondente  $w(G)$  é nilpotente.*

*Demonstração.* Seja  $w = w(x_1, \dots, x_r)$  uma palavra não-comutador. Portanto, existe um  $i \in \{1, \dots, r\}$  de modo que a soma dos expoentes referentes a variável  $x_i$  que aparecem na palavra  $w$  é diferente de 0. A menos de uma reordenação dos índices, se necessário, podemos supor que tal variável é  $x_1$  e chamemos a soma desses expoentes como sendo  $d$ . Faça a substituição de 1 por cada variável  $x_2, \dots, x_r$  e substitua um elemento arbitrário  $g \in G$  por  $x_1$ , isto é,

$$w(g, \underbrace{1, \dots, 1}_{(r-1) \text{ vezes}}) = \Phi_w(g, \underbrace{1, \dots, 1}_{(r-1) \text{ vezes}}) = g^d.$$

Com isso, temos que  $g^d$  é um  $w$ -valor, para cada  $g \in G$ . Pela Proposição 4.2.8,  $G^d$  é nilpotente. Segue do Lema 4.1.1 que o quociente  $G/G^d$  é finito. Portanto,  $w(G)/G^d$  é nilpotente, pois é um grupo finito gerado por elementos Engel. Assim,  $w(G)$  é solúvel e pelo Teorema 2.2.5,  $w(G)$  é nilpotente.  $\square$

A partir da Proposição 4.2.8 temos um critério de solubilidade para grupos profinitos finitamente gerados nos quais certas potências fixadas são elementos Engel, mais precisamente:

**Corolário 4.2.10.** *Seja  $q$  a potência de um número primo. Se  $G$  é um grupo profinito finitamente gerado no qual  $x^q$  é Engel, para todo  $x \in G$ , então  $G$  é solúvel.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 4.2.9, temos que  $G^q$  é nilpotente. Sabemos que  $G/G^q$  é um  $p$ -grupo finito (Lema 4.1.1). Portanto,  $G$  é solúvel.  $\square$

**Observação 4.2.11.** *De maneira análoga ao que foi evidenciado no Corolário 3.2.9, as restrições sobre as potências serem elementos Engel não é suficiente para assegurar que tais grupos sejam nilpotentes. Consideramos o diedral  $D_n$  (onde  $n$  não é potência de 2) e apresentação:*

$$D_n = \langle x, y \mid x^n = 1, y^2 = x^{-1} \rangle.$$

*Temos que  $g^2$  é 2-Engel, para todo  $g \in D_n$ , mas  $D_n$  não é nilpotente.*

## Considerações finais do Capítulo

- Nesse capítulo, por uma questão técnica acerca de subgrupos verbais de grupos profinitos, consideramos todos os grupos finitamente gerados. As referências [NS, NS2], [SD1, SD2] e [J-Z] nos fornecem uma visão geral dos avanços recentes associados aos subgrupos verbais de grupos profinitos.
- De certa forma, o **Teorema F** é o análogo profinito finitamente gerado do **Teorema D**. Entretanto, obtemos que o subgrupo verbal associado a palavra não-comutador é nilpotente. Enquanto isso, o **Teorema D**, assegura que  $w(G)$  é “apenas” localmente nilpotente.
- O **Teorema A** não parece admitir uma versão análoga no caso profinito. Nessa perspectiva, o resultado mais próximo obtido foi o **Teorema E**

---

para grupos pronilpotentes finitamente gerados. E, ao mesmo tempo, esse resultado *parece* ser o melhor possível. Uma razão que sugere tal comentário é baseada no fato de não haver um resultado semelhante ao Lema 4.2.1 no caso de comutadores multilineares quaisquer. Na verdade, mesmo para a palavra  $w = [[x, y], [z, t]]$  (palavra metabeliana) não é claro que possamos obter uma extensão para o Lema 4.2.1.

## CAPÍTULO 5

---

### Grupos satisfazendo identidades

---

Nosso objetivo é determinar critérios de nilpotência para grupos residualmente finitos e grupos localmente graduados. Em princípio, nesses grupos supomos adicionalmente que eles são Engel limitados e satisfazem a uma identidade  $f \equiv 1$ . Todos os resultados abordados nesse Capítulo foram obtidos em parceria com A. Tortora e M. Tota [BTT].

#### 5.1 Motivação e resultados principais

Como já citamos anteriormente uma das questões centrais relacionadas a elementos Engel é determinar condições suficientes para termos a seguinte igualdade de subconjuntos de um grupo  $G$ :

$$\varepsilon(G) = HP(G).$$

Nos capítulos anteriores vimos que as identidades de um grupo podem induzir que os elementos Engel estejam no radical de Hirsch-Plotkin. E, nesse contexto, as identidades estavam intimamente relacionadas às condições de Engel. Agora, mudamos o foco do nosso estudo e damos ênfase a condições análogas ao seguinte Teorema:

**Teorema.** (Wilson, [W]) Sejam  $n$  um inteiro positivo e  $G$  um grupo residualmente finito. Se  $G$  é  $n$ -Engel, então  $G$  é localmente nilpotente.

A grosso modo, um grupo que satisfaz as hipóteses do Teorema [W] tem todos os seus elementos  $n$ -Engel (esse  $n$  é um inteiro fixado) e satisfaz a identidade:

$$\varepsilon_n = [x, {}_n y] \equiv 1.$$

Vamos generalizar tal resultado na seguinte perspectiva: continuamos estudando grupos residualmente finitos satisfazendo uma identidade de grupo  $f \equiv 1$ . Mas suporemos que  $G$  é Engel limitado. Em princípio, essa identidade não precisa estar relacionada ao fato de  $G$  ser Engel limitado.

**Relembrando.** Dizemos que  $G$  é Engel limitado se para cada  $g \in G$  existir um inteiro positivo  $n = n(g)$  tal que  $g$  é  $n$ -Engel. Note que, a priori, o conjunto de inteiros  $\{n(g) \mid g \in G\}$  não é, necessariamente, limitado.

Demonstramos os seguintes resultados:

**Teorema G.** Seja  $G$  um grupo residualmente finito satisfazendo uma identidade não trivial  $f \equiv 1$ . Se  $G$  é Engel limitado, então  $G$  é localmente nilpotente.

**Teorema H.** Seja  $G$  um grupo localmente graduado satisfazendo uma identidade não trivial  $f \equiv 1$ . Se  $G$  é Engel limitado, então  $G$  é localmente nilpotente.

## 5.2 Demonstrações dos resultados

Antes de apresentar os teoremas principais demonstramos um resultado auxiliar no qual substituímos a hipótese geral do grupo ser tomado como sendo Engel limitado para uma suposição na natureza dos geradores de um dado grupo. Em princípio, tal suposição é menos restritiva, mas ainda nos permite usar resultados Lie-teóricos.

**Proposição 5.2.1.** *Seja  $G$  um grupo residualmente finito satisfazendo uma identidade não trivial  $f \equiv 1$ . Se  $G$  é um grupo gerado por um conjunto  $c$ -fechado  $X$  de elementos Engel limitados, então  $G$  é localmente nilpotente.*

*Demonstração.* Devemos demonstrar que  $X \subseteq HP(G)$  e, conseqüentemente,  $G$  é localmente nilpotente. Consideramos um subconjunto com uma quantidade finita e arbitrária de elementos em  $X$ , digamos  $\{x_1, \dots, x_t\}$ . Chamamos  $H = \langle x_1, \dots, x_t \rangle$ . Vamos mostrar que  $H$  é nilpotente. Pelo Teorema 2.2.3, todos os quocientes finitos de  $H$  são nilpotentes. Daí,  $H$  é um grupo residualmente (nilpotente finito). Como  $H$  é um grupo finitamente gerado, pelo Lema 1.2.5, podemos assumir que  $H$  é residualmente- $p$ , para algum primo  $p$ . Consideramos a álgebra de Lie associada a série de ZJL

$$H = D_1 \geq D_2 \geq \dots$$

de  $H$ . Em particular,  $L = L_p(H)$  é gerado pelos elementos  $\tilde{x}_i = x_i D_2$ ,  $i = 1, 2, \dots, t$ . Como  $X$  é  $c$ -fechado, temos que um comutador de grupo arbitrário  $h$  nos elementos  $x_1, \dots, x_t \in X$  é ainda Engel limitado, pois é um elemento de  $X$ . Dessa maneira, dado um comutador  $\tilde{h}$  nos elementos  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_t$ , temos associado um comutador de grupo  $h$  (tomado sobre  $x_1, \dots, x_t$ ) tendo o mesmo sistema de colchetes de  $\tilde{h}$ . Daí,  $\tilde{h}$  é ad-nilpotente. Como  $H$  satisfaz a identidade  $f \equiv 1$ , segue do Lema 1.4.13, que a álgebra  $L$  é PI. Finalmente, pelo Teorema 1.4.5,  $L$  é nilpotente.

Tome  $\hat{H}$  o completamento pro- $p$  de  $H$ . Em particular,  $L_p(\hat{H}) = L$ , pois  $H$  e  $\hat{H}$  tem os mesmos quocientes finitos [RZ, Proposição 3.2.2]. A partir do Teorema 1.4.11 concluímos que  $\hat{H}$  é  $p$ -ádico analítico. Finalmente,  $H$  tem uma representação linear fiel sobre os números  $p$ -ádicos. Mais ainda, como  $H$  satisfaz uma identidade, temos que  $H$  não pode conter um subgrupo isomorfo a um grupo livre não abeliano. De acordo com o Teorema 1.3.13,  $H$  possui um subgrupo solúvel de índice finito. Como todas as imagens finitas de  $H$  são nilpotente (Teorema 2.2.3), temos que  $H$  é solúvel. Finalmente, pelo Teorema 2.2.5, obtemos que  $H$  é nilpotente. Como os elementos  $x_1, \dots, x_t$  foram escolhidos arbitrariamente, concluímos a demonstração.  $\square$

Agora, podemos fazer uma demonstração bem curta do **Teorema G**.

**Teorema G.** Seja  $G$  um grupo residualmente finito satisfazendo uma identidade não trivial  $f \equiv 1$ . Se  $G$  é Engel limitado, então  $G$  é localmente nilpotente.

*Demonstração.* Consideramos o conjunto  $X$  como sendo o próprio  $G$ . Naturalmente,  $G$  é  $c$ -fechado e podemos aplicar diretamente a Proposição 5.2.1.  $\square$



**Corolário 5.2.2.** *Sejam  $n$  um inteiro positivo e  $w = w(x_1, \dots, x_s)$  uma palavra. Suponha que  $G$  é um grupo residualmente finito no qual todos os  $w$ -valores são  $n$ -Engel. Se  $G_w$  é  $c$ -fechado, então o subgrupo verbal associado  $w(G)$  é localmente nilpotente.*

*Demonstração.* Por definição,  $\langle G_w \rangle = w(G)$ . Temos que o grupo  $G$  satisfaz a identidade:

$$[x, {}_n w(x_1, \dots, x_s)] \equiv 1.$$

Pela Proposição 5.2.1, o subgrupo verbal  $w(G)$  é localmente nilpotente.  $\square$

## Em grupos localmente graduados

**Teorema H.** *Seja  $G$  um grupo localmente graduado satisfazendo uma identidade  $f \equiv 1$ . Se  $G$  é Engel limitado, então  $G$  é localmente nilpotente.*

*Demonstração.* Considere um subconjunto finito e arbitrário de elementos de  $G$ , suponhamos  $g_1, \dots, g_s \in G$ . Chamemos  $H = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ . Vamos mostrar que  $H$  é nilpotente.

**Afirmção:** É suficiente mostrar que  $H$  é residualmente finito.

Caso  $H$  seja residualmente finito, basta usar o **Teorema G**. Agora, a demonstração segue por contradição. consideramos  $R$  como sendo o subgrupo residual de  $H$  e suponhamos que  $R \neq 1$ . Sabemos que  $H/R$  é residualmente finito e, pela Proposição 5.2.1, temos que  $H/R$  é nilpotente. Assim, existe um inteiro  $s$  tal que  $H^{(s)} \leq R$ .

Note que  $H/H^{(s+1)}$  é nilpotente. Visto que é um grupo solúvel gerado por uma quantidade finita de elementos Engel (Teorema 2.2.5). Assim,  $H/H^{(s+1)}$  é também residuamente finito [R2, 5.4.18]. Daí,

$$H^{(s)} = H^{(s+1)}.$$

Como  $H$  é Engel limitado (e finitamente gerado), temos que  $H^{(s)}$  é finitamente gerado para cada inteiro positivo  $s$  (pelo Corolário 2.3.6). Temos que  $R/H^{(s)}$  é um subgrupo finitamente gerado, pois é um subgrupo de um grupo nilpotente finitamente gerado. Em particular,  $R$  é finitamente gerado. Digamos,  $R$  tem  $r$  geradores. Como  $G$  é um grupo localmente graduado, temos que  $R$  possui um subgrupo próprio  $N_1$  de índice finito. Chamemos  $|R : N_1| = t < \infty$ . Agora, tomemos  $N$  como sendo a interseção de todos

os subgrupos de  $R$  com índice igual a  $t$ . Por [H, Teorema 7.2.9], temos que o número de subgrupos de índice  $t$  em  $R$  é limitado por uma função que depende somente de  $t$  e  $r$ . Assim,

$$|R : N| < \infty.$$

Temos ainda que  $N$  é um subgrupo característico de  $R$ . Portanto,  $H/N$  satisfaz a condição maximal [R2, 5.4.12]. Pelo Teorema 2.2.3,  $H/N$  é nilpotente. Logo,  $H^{(s+1)}$  é um subgrupo normal próprio de  $H^{(s)}$ . Absurdo. Logo,  $H$  é, necessariamente, residualmente finito e o resultado segue.  $\square$

## Considerações finais do Capítulo

- Cabe destacar a importância dos conjuntos normais e/ou  $c$ -fechados em vários resultados de Teoria de Grupos. Por exemplo: Lema de Dietzman [R2, 14.5.7]; extensão do Problema Restrito de Burnside [S6] e o fecho normal de  $p$ -elementos em um grupo finito [GM]. Em particular, os resultados em [S6] tem grande influência no presente capítulo.
- Seja  $G$  um grupo. Para cada inteiro positivo  $k$ , consideramos os conjuntos:

$$G_{\gamma_k} := \{[x_1, \dots, x_k] \mid x_i \in G\}$$

e

$$G_{\delta_k} := \{[\delta_k(x_1, \dots, x_{2^{k-1}}), \delta_k(x_{2^{k-1}+1}, \dots, x_{2^k})] \mid x_i \in G\}$$

são conjuntos  $c$ -fechados em  $G$ . A grosso modo, podemos dizer que existem “diversos” conjuntos  $c$ -fechados em qualquer grupo. Mas, eventualmente, tais conjuntos podem ser todo o grupo  $G$  ou mesmo triviais.

- Em princípio, as hipóteses que impomos nos resultados desse capítulo são razoáveis, no seguinte sentido: existe um grupo  $G$  que satisfaz uma identidade  $f \equiv 1$ , o qual é gerado por uma quantidade finita de elementos  $n$ -Engel e  $G$  não é localmente nilpotente. Tal grupo é construído a partir de resultados de Ivanov [I2]. Adicionalmente, esse grupo tem expoente finito (na verdade, a identidade em questão é  $f = x^m \equiv 1$ , com  $m = 2^{48}$ ) e, consequentemente, pelo PRB tal grupo não pode ser residualmente finito. Nessa perspectiva, parece natural considerar a

seguinte questão:

**Pergunta:** Seja  $G$  um grupo residualmente finito satisfazendo uma identidade  $f \equiv 1$ . Se  $G$  é gerado por um conjunto de elementos Engel limitados, então  $G$  é nilpotente?

Com a Proposição 5.2.1, obtivemos solução positiva para a questão acima quando  $G$  é gerado por um conjunto  $c$ -fechado de elementos Engel limitados. Caso a pergunta acima seja falsa, qual hipótese seria natural adicionar ao questionamento acima para termos solução positiva? Para maiores detalhes sobre o exemplo citado acima, veja [I2] ou veja [A, págs. 6–7].

# APÊNDICE A

---

## Problemas de Burnside

---

Fazemos um apanhado de certos problemas de finitude, conhecidos como *Problemas de Burnside*. Tais questões tem grande influência em diversos avanços recentes da Teoria de Grupos.

### A.1 Problemas de Burnside

**Conjectura A.1.1.** *Seja  $G$  um grupo finitamente gerado. Se todos os seus elementos tem ordem finita, então  $G$  é finito.*

Tal problema foi proposto por W. Burnside em 1902 e é conhecido como **Problema Irrestrito de Burnside** (ou **Problema Geral de Burnside**). Embora seja uma proposição de fácil enunciado, ela ficou em aberto por mais de 60 anos e, em geral, tem resposta negativa (grupos de Golod-Shafarevich [G], 1964). Uma outra questão, também proposta por W. Burnside, foi a seguinte:

**Conjectura A.1.2.** *Sejam  $n$  um inteiro positivo e  $G$  um grupo finitamente gerado. Se  $G$  tem expoente  $n$ , então  $G$  é finito.*

Esta questão é conhecida como **Problema de Burnside**. Também tem resposta negativa e os primeiros exemplos só apareceram em 1968 (S. I. Adyan e P. S. Novikov [AN]).

## A.2 Problema Restrito de Burnside

**Proposição A.2.1.** *Sejam  $m, n$  inteiros positivos. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) *Existe um número  $B(m, n)$  dependendo somente de  $m$  e  $n$  tal que a ordem de qualquer grupo  $m$ -gerado de expoente  $n$  tem ordem no máximo  $B(m, n)$ ;*
- (b) *Todo grupo residualmente finito de expoente  $n$  é localmente finito;*
- (c) *A classe dos grupos localmente finitos de expoente  $n$  forma uma variedade;*
- (d) *A classe dos grupos localmente nilpotentes de expoente  $n$  forma uma variedade;*

A afirmação (a) é conhecido como **Problema Restrito de Burnside**. Tal questão foi proposta por W. Magnus (1950). O Problema Restrito de Burnside foi demonstrado completamente por E.I. Zelmanov [Z2, Z3]. Tal resultado e sua demonstração tem forte impacto em diversos avanços recentes da Teoria de Grupos. Cabe destacar alguns desses avanços [S, S1, S2, S3, W, WZ].

Mais informações sobre o Problema Restrito de Burnside, veja [GN].

## A.3 Grupos localmente graduados

Como consequência direta do Problema Restrito de Burnside, temos a seguinte condição de finitude:

**Lema A.3.1.** *(Macedońska, [M, Teorema 1]) Sejam  $n$  um inteiro positivo e  $G$  um grupo localmente graduado. Se  $G$  tem expoente  $n$ , então  $G$  é localmente finito.*

*Demonstração.* Seja  $H$  um grupo finitamente gerado de  $G$ . Precisamos mostrar que  $H$  é finito.

Suponhamos que  $H$  é infinito. Consideramos  $R$  a interseção de todos os subgrupos normais de índice finito. Em particular,  $H/R$  é finito. Assim,  $R$  é finitamente gerado [R2, 1.6.11]. Como  $G$  é localmente graduado, temos

---

que existe um subgrupo próprio  $N \triangleleft R$  e  $|R : N| < \infty$ . Em particular,  $N$  é subgrupo de índice finito de  $H$ . Dessa forma,  $R \leq N < R$ . Portanto,  $H$  é finito.  $\square$

# APÊNDICE B

---

## Conjecturas

---

Essa seção tem como finalidade explicitar algumas questões que surgiram ao longo da preparação desse trabalho. Daí, incluem tanto problemas genéricos sobre elementos Engel como problemas gerais acerca de subgrupos verbais e variedades de grupos. Cabe destacar que muitos dos problemas já surgiram ao longo do texto e são apresentados novamente e, eventualmente, tem numerações distintas. Ou seja, esse apêndice é independente da numeração do restante do texto.

Outro fato de suma importância é que os problemas retirados da “The Kourovka Notebook” [Kh.M] foram traduzidos de maneira livre, com o intuito de torná-los mais naturais e compatíveis do ponto de vista das notações do texto. Para coibir eventuais erros, sugerimos que o leitor veja as questões no texto original que, nesse caso se encontrada disponível em arXiv:1401.0300.

## B.1 Subgrupos Verbais

**Conjectura B.1.1.** (*Shumyatsky [Kh.M, Problema 15.104]*) *Sejam  $n$  um inteiro positivo e  $w$  uma palavra de grupo nas variáveis  $x_1, x_2, \dots$ . Se  $G$  é um grupo residualmente finito satisfazendo a identidade  $w^n = 1$ . Então o subgrupo verbal  $w(G)$  é localmente finito.*

**Observação B.1.2.** *Quando  $w$  é a palavra  $w = x_1$ , tal conjectura é válida,*

*pois coincide com o célebre Problema Restrito de Burnside. Uma referencia com os desenvolvimentos recentes dessa questão podem ser encontradas em J. Caldeira e P. Shumyatsty [CS].*

**Conjectura B.1.3.** (Macdonald, [Kh.M, Problema 13.34]) *Se  $G$  é um grupo satisfazendo  $f = [x, y]^n \equiv 1$ , então  $G'$  é periódico.*

**Observação B.1.4.** *Tal questão foi proposta originalmente por I. D. Macdonald e foi incluída entre os problemas da décima terceira edição da “Kourovka Notebook” por V. D. Mazurov. Em geral, tal problema não é verdadeiro. Independentemente, G. S. Deryabina e P. A. Kozhevnikov [DK] (usando técnicas de A. Ol’shanskii) e S. I. Adyan [ASI] (usando técnicas de Novikov-Adyan) obtiveram contra-exemplos para tal problema.*

**Conjectura B.1.5.** (Shumyatsky, [Kh.M, Problema 17.126]) *Se  $G$  é um grupo residualmente finito satisfazendo a identidade  $f = [x, y]^n \equiv 1$ , então  $G'$  é localmente finito.*

Em [S], P. Shumyatsky obteve solução positiva para a Conjectura acima quando  $n$  é potência fixada de um primo  $p$ .

**Conjectura B.1.6.** (Mazurov, [Kh.M, Problema 15.51]) *Seja  $G$  um grupo periódico. Se  $G$  satisfaz a lei  $f = [x, y]^5 \equiv 1$ , então  $G'$  é 5-grupo.*

**Definição B.1.7.** *Seja  $G$  um grupo. Denotamos por  $\lambda(G)$  o conjunto de todas as ordens de elementos de  $G$ . Tal conjunto é chamado de espectro do grupo  $G$ .*

**Conjectura B.1.8.** (Mazurov, [Kh.M, Problem 16.56]) *Seja  $G$  um grupo. Se  $\lambda(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , então  $G$  é localmente finito.*

**Conjectura B.1.9.** *Sejam  $n$  um inteiro positivo e  $q$  a potência de um primo  $p$ . Se  $\mathfrak{X}$  é a classe dos grupos  $G$  localmente solúveis e satisfazendo a identidade  $f = [x, {}_n y^q] \equiv 1$ , então  $\mathfrak{X}$  é uma variedade.*

**Pergunta B.1.10.** *Para quais identidades (leis) de grupos  $w$ , temos: Se  $G$  é um grupo residualmente finito satisfazendo  $f \equiv 1$ , então  $G$  é localmente solúvel?*

Bem a pergunta acima tem algumas soluções positivas:



- $A_1$ ) Seja  $q$  a potência de um primo fixado. Pelo **PRB**, se  $G$  é um grupo residualmente finito satisfazendo a identidade  $f = x^q \equiv 1$ , então  $G$  é localmente ( $p$ -grupo finito). Em particular,  $G$  é localmente nilpotente.
- $A_2$ ) Pelo Teorema de Wilson [W], se  $G$  é um grupo residualmente finito satisfazendo a identidade  $f = [x, {}_n y] \equiv 1$ , então  $G$  é localmente nilpotente.
- $A_3$ ) Pelo Teorema C no Capítulo 3, se  $G$  é um grupo residualmente finito satisfazendo a lei  $f = [x, {}_n y^q] \equiv 1$ , onde  $q$  é potência de um primo, então  $G$  é localmente solúvel.

**Conjectura B.1.11.** (*Shumyatsky, [S4]*) *Sejam  $w$  uma palavra de grupo e  $n$  um inteiro positivo. Considere  $\mathfrak{X}$  a classe de todos os grupos  $G$  tais que o subgrupo verbal  $w(G)$  é localmente nilpotente e todos os  $w$ -valores são  $n$ -Engel. Então,  $\mathfrak{X}$  é uma variedade.*

**Conjectura B.1.12.** (*Shumyatsky [S2]*) *Sejam  $w$  uma palavra de grupo e  $n$  um inteiro positivo. Assuma que  $G$  é um grupo residualmente finito no qual todos os  $w$ -valores são  $n$ -Engelianos. Então, o subgrupo verbal correspondente  $w(G)$  é localmente nilpotente.*

**Conjectura B.1.13.** *Sejam  $w$  uma palavra de grupo e  $n$  um inteiro positivo. Assuma que  $G$  é um grupo localmente graduado no qual todos os  $w$ -valores são  $n$ -Engelianos. Então, o subgrupo verbal correspondente  $w(G)$  é localmente nilpotente.*

**Conjectura B.1.14.** (*Shumyatsky, Tortora e Tota [STT]*) *Sejam  $w$  uma palavra de grupo e  $n$  um inteiro positivo. Assuma que  $G$  é um grupo ordenável no qual todos os  $w$ -valores são  $n$ -Engelianos. Então, o subgrupo verbal correspondente  $w(G)$  é localmente nilpotente.*

Ressaltamos os seguintes avanços:

- $A_1$ ) (Para a Conjectura B.1.12) No Teoremas A e Teorema C (e/ou em [BSTT]), conseguimos demonstrar que tal questão é verdadeira quando  $w$  é uma palavra não-comutador ou  $w = v^d$ , onde  $v$  é um comutador multilinear e  $d$  é um inteiro positivo.
- $A_2$ ) (Para a Conjectura B.1.13) Com o Teoremas B e Teorema D (e/ou em [BSTT]), conseguimos demonstrar que tal questão é verdadeira quando  $w$  é uma palavra não-comutador ou  $w$  é um comutador multilinear. Em

[STT], P. Shumyatsky, A. Tortora e M. Tota mostraram que tal resultado também vale para  $v = w^d$ , onde  $w$  é um comutador multilinear e  $d$  é um inteiro positivo qualquer.

$A_3$ ) (Para a Conjectura B.1.14) Em [STT2], P. Shumyatsky, A. Tortora e M. Tota mostraram que tal conjectura é verdadeira para a palavra  $v = w^d$ , onde  $w$  é um comutador multilinear. Na verdade, mostraram adicionalmente que  $w(G)$  é localmente nilpotente. E para a palavra não-comutador  $w$ , eles mostraram que o subgrupo verbal  $w(G)$  é nilpotente.

## B.2 Engelianidade

**Conjectura B.2.1.** (*Plotkin, [Kh.M, Problema 14.70]*) Se  $G$  é um grupo  $n$ -Engel, então  $G$  é localmente nilpotente.

Para  $n = 2$  (Levi, [R2, 12.3.6]), 3 (H. Heineken) ou 4 (G. Havas e M. Vaughan-Lee, [HV]) a conjectura tem resposta positiva. Se  $n \geq 5$  a Conjectura permanece em aberto. Nessa conjectura há outros avanços quando restringimos a classe de grupos considerada. Por exemplo: se o grupo satisfaz a condição maximal (R. Baer, [R2, 12.3.7]), grupos solúvel (K. Gruenberg, [R2, 12.3.3]), grupos residualmente finitos (J. Wilson, [W]), profinitos (J. Wilson e E.I. Zelmanov, [WZ]), grupos topológicos compactos (Yu. Medvedev, [MY]) ou grupos localmente graduados (Y. Kim e A.H. Rhemtulla, [KR]) temos também resposta positiva para a Conjectura.

**Conjectura B.2.2.** (*Traustason, [Kh.M, Problema 16.96]*) Seja  $G$  um  $p$ -grupo  $n$ -Engel localmente finito, com  $p > n$ . Então  $G$  é um grupo de Fitting.

**Conjectura B.2.3.** (*Abdollahi, [Kh.M, 17.11]*) Sejam  $G$  um grupo e  $x \in G$ . Se  $x$  é 3-Engel, então  $x \in HP(G)$ .

## B.3 Nil-automorfismos

Sejam  $G$  um grupo e  $\psi \in \text{Aut}(G)$ . Tem-se o seguinte elemento em  $G$ :

$$[g, \psi] := g^{-1}g^\psi,$$

onde  $g^\psi$  é a imagem de  $g$  via  $\psi$ . Tal elemento pode ser pensado como sendo um comutador usual no produto semidireto:  $K = G \rtimes \text{Aut}(G)$ . B. Plotkin definiu a seguinte noção (generalização) de Engelianidade: sejam  $G, H$  grupos. Suponha que  $H \lesssim \text{Aut}(G)$ . Diz-se que  $\psi \in H$  é um *nil-automorfismo* de  $G$  se para cada  $g \in G$  existe  $n = n(g)$  tal que

$$[g, {}_n\psi] = 1.$$

Seja  $k$  um inteiro positivo. Um automorfismo  $\psi$  é  $k$ -unipotente em  $G$  se  $[g, {}_k\psi] = 1$ , para todo  $g \in G$ .

Como corolário (direto) do resultado de Casolo e Puglisi [CP] segue o seguinte resultado sobre nil-automorfismos de grupos residualmente finitos.

**Teorema.** (Casolo, Puglisi, [CP]). Sejam  $G$  um grupo finito e  $H$  um grupo residualmente finito. Se  $G \lesssim \text{Aut}(H)$  e todo elemento de  $G$  é um nil-automorfismo de  $H$ , então  $G$  é nilpotente.

Tal resultado motiva as seguintes questões:

**Conjectura B.3.1.** *Sejam  $G$  um grupo finito e  $H$  um subgrupo residualmente finito. Seja  $w$  uma palavra de grupo. Se  $G \lesssim \text{Aut}(H)$  e todos os  $w$ -valores de  $G$  são nil-automorfismos de  $H$ , então o subgrupo verbal  $w(G)$  é nilpotente.*

**Conjectura B.3.2.** *Sejam  $G$  um grupo solúvel finito e  $H$  um subgrupo residualmente finito. Se  $G \lesssim \text{Aut}(H)$  e todos os elementos de  $G$  são  $k$ -unipotentes em  $H$ , então  $h(G)$  é limitada por uma função que só depende de  $n$ .*

**Conjectura B.3.3.** *Sejam  $G$  um grupo solúvel finito e  $H$  um subgrupo residualmente finito. Se  $G \lesssim \text{Aut}(H)$  e  $g$  é um nil-automorfismo de  $H$ , então  $g \in \text{Fit}(G)$ .*

**Conjectura B.3.4.** *Sejam  $G$  um grupo finito e  $H$  um subgrupo residualmente finito. Se  $G \lesssim \text{Aut}(H)$  e  $g$  é um nil-automorfismo de  $H$ . Então  $g \in \text{Fit}(G)$ .*

---

## Referências

---

- [A] A. Abdollahi, Engel elements in groups. Groups St Andrews 2009 in Bath. Volume 1, 94–117, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **387**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011.
- [AS] C. Acciarri e P. Shumyatsky, On words that are concise in residually finite groups, *J. Pure Appl. Algebra*, **218**, no. 1 (2014) 130–134.
- [ASI] S. I. Adyan, Groups with periodic commutators, *Dokl. Akad. Nauk*, v. **374**, no. 2 (2000) 151–153.
- [AN] S. I. Adyan e P. S. Nikolov, Infinite periodic groups I, II, III. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. matem.*, v. **32**, No. 1,2,3 (1968).
- [BS] R. Bastos e P. Shumyatsky, On profinite groups with Engel-like conditions, (submetido).
- [BSTT] R. Bastos, P. Shumyatsky, A. Tortora e M. Tota, On groups admitting a word whose values are Engel, *Internat. J. Algebra Comput.*, v. **23**, no. 1 (2013) 81–89. ArXiv:1208.5623.
- [BTT] R. Bastos, A. Tortora e M. Tota, *On Engel groups satisfying an identity*, (em preparação).
- [HB] N. Blackburn e B. Huppert, *Finite Groups II*, SPRINGER-VERLAG INC., 175 FIFTH AVE., NEW YORK, NY, 1981, 242 (1981).

- [CS] J. Caldeira e P. Shumyatsky, On verbal subgroups in residually finite groups, *Bull. Aust. Math. Soc.*, v. **84**, (2011) 159–170.
- [CP] C. Casolo e O. Puglisi, Nil-automorphisms of groups with residual properties, *Israel J. Math.*, v. **198**, no. 1 (2013) 91–110.
- [DK] G. S. Deryabina e P. A. Kozhevnikov, The derived subgroup of a group with commutators of bounded order can be non-periodic, *Comm. Algebra*, v. **27**, no. 9 (1999) 4525–4530.
- [DDMS] J. D. Dixon, M. P. F. du Sautoy, A. Mann e D. Segal, *Analytic pro- $p$  groups*, volume 61 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics, (1999).
- [G] E. S. Golod, On nil-algebras and finitely approximable  $p$ -groups, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, v. **28**, (1964) 273–276.
- [GK] K. W. Gruenberg, The elements Engel of a soluble group, *Illinois J. Math.*, v. **3**, (1959) 151–168.
- [GN] N. Gupta, On groups in which every element has finite order, *Amer. Math. Monthly*, v. **96**, no. 4 (1989) 297–308.
- [GM] R. Guralnick e G. Malle, Products and commutators of classes in algebraic groups, arXiv:1302.0182 [math.GR]
- [GS] R. Guralnick e P. Shumyatsky, On rational and concise words, arXiv:1406.7175 [math.GR].
- [H] H. Marshall Jr., *The theory of groups*, New York (1959).
- [HV] G. Havas e M. R. Vaughan-Lee, 4-Engel groups are locally nilpotent, *Internat. J. Algebra Comput.*, v. **15**, no. 4 (2005) 649–682.
- [I] S. V. Ivanov, P. Hall’s conjecture on the finiteness of verbal subgroups, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, v. **33**, no. 6 (1989) 60–70.
- [I2] S. V. Ivanov, The free Burnside groups of sufficiently large exponents, *Internat. J. Algebra Comput.*, v. **4**, no. 1-2 (1994), ii+308 pp.
- [J-Z] A. Jaikin-Zaparian, On the verbal width of finitely generated pro- $p$  groups, *Rev. Mat. Iberoam.*, v. **24**, no. 2 (2008) 617–630.

- 
- [KM] M. I. Kargapolov e Ju. I. Merzljakov, *Fundamentals of the Theory of Groups*, Vol. 62. New York: Springer-Verlag, 1979.
- [K] L. Kelley, *General Topology*, van Nostre, Toronto - New York - London, 1955.
- [Kh.M] E. I. Khukhro e V. D. Mazurov, eds., Kurovka Notebook, 18th Edition, Novosibirsk, 2014.
- [KR] Y. Kim e A. H. Rhemtulla, On locally graded groups, *Groups-Korea 94 (Pusan)*, 189–197, de Gruyter, Berlin, 1995.
- [KB] B. Klopsch, *Five Lectures on analytic pro- $p$  groups: A meeting-ground between finite  $p$ -groups and Lie Theory*. Notas de um minicurso na conferência: “Asymptotic Methods in Infinite Group Theory”.
- [L] M. Lazard, Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, v. **71**, (1954) 101–190.
- [L2] M. Lazard, Groupes analytiques  $p$ -adiques, *IHES Publ. Math.*, v. **26**, (1965) 389–603.
- [LMS] P. Longobardi, M. Maj e H. Smith, *A note on locally graded groups*, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, v. **94**, (1995) 275–277.
- [M] O. Macedońska, On difficult problems and locally graded groups, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, v. **142**, (2007) 1949–1953.
- [MY] Y. Medvedev, On compact Engel groups, *Israel J. Math.*, v. **135**, (2003) 147–156.
- [N] H. Neumann, *Varieties of groups*. Springer-Verlag New York, Inc., New York 1967.
- [NS] N. Nikolov e D. Segal, On finitely generated profinite groups. I. Strong completeness e uniform bounds, *Ann. of Math. (2)*, v. **165**, no. 1 (2007) 171–238.
- [NS2] N. Nikolov e D. Segal, Powers in finite groups, *Groups Geom. Dyn.*, v. **5**, no. 2 (2011) 501–507.

- 
- [RZ] L. Ribes e P. Zalesskii, *Profinite Groups*, 2nd Edition, Springer Verlag, Berlin–New York, 2010.
- [R] D. J. S. Robinson, *Finiteness conditions in generalized soluble groups*, Parte I e II (Springer, Berlin, 1972).
- [R2] D. J. S. Robinson, *A course in the Theory of Groups* (2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1996).
- [SD1] D. Segal, *Words: notes on verbal width in groups*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 361. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [SD2] D. Segal, Remarks on profinite groups having few open subgroups, arXiv:1304.3893 [math.GR].
- [S] P. Shumyatsky, On groups with commutators of bounded order, *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. **127**, (1999) 2583–2586.
- [S1] P. Shumyatsky, *On residually finite groups in which commutators are Engel*, *Comm. Algebra*, v. **27**, (1999) 1937–1940.
- [S2] P. Shumyatsky, Applications of Lie ring methods to group theory, in *Nonassociative algebra e its applications*, eds. R. Costa, A. Grishkov, H. Guzzo Jr. e L. A. Peresi, Lecture Notes in Pure e Appl. Math., v. **211** (Dekker, New York, 2000), pp. 373–395.
- [S3] P. Shumyatsky, Verbal subgroups in residually finite groups, *Quart. J. Math.*, v. **51**, (2000) 523–528.
- [S4] P. Shumyatsky, *Verbal generalizations of the restricted Burnside problem, 16th School of Algebra*, Part II (Portuguese) (Brasília, 2000). *Mat. Contemp.* **21** (2001), 239–254.
- [S5] P. Shumyatsky, On profinite groups in which commutators are Engel, *J. Aust. Math. Soc.*, v. **70**, no. 1 (2001) 1–9.
- [S6] P. Shumyatsky, Elements of prime power order in residually finite groups, *Int. J. Algebra Comput.*, v. **15**, no. 3 (2005) 571–576.
- [STT] P. Shumyatsky, A. Tortora and M. Tota, *On locally graded groups with a word whose values are Engel*, arXiv: 1305.3045v1 [math.GR].

- 
- [STT2] P. Shumyatsky, A. Tortora and M. Tota, *An Engel condition for orderable groups*, arXiv: 1402.5247 [math.GR].
- [T] J. Tits, Free subgroups in linear groups, *J. Algebra*, v. **20**, (1972) 250–270.
- [W] J. S. Wilson, Two-generator conditions for residually finite groups, *Bull. London Math. Soc.*, v. **23**, (1991) 239–248.
- [W2] J. S. Wilson, *Profinite Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [WZ] J. S. Wilson e E. I. Zelmanov, Identities for Lie algebras of pro- $p$  groups, *J. Pure Appl. Algebra*, v. **81** (1992) 103–109.
- [Z] E. I. Zelmanov, Lie ring methods in the theory of nilpotent groups, in *Groups '93/St. Andrews*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol. **212** (Cambridge University Press, Cambridge, 1995), pp. 567–585.
- [Z2] E. Zel'manov, *The solution of the restricted Burnside problem for groups of odd exponent*, Math. USSR Izv. **36** (1991), 41-60.
- [Z3] E. Zel'manov, *The solution of the restricted Burnside problem for 2-groups*, Math. Sb. **182** (1991), 568–592.